

Министерство образования и науки Тамбовской области
Тамбовское областное государственное бюджетное
профессиональное образовательное учреждение
«Мичуринский агросоциальный колледж»
(ТОГБПОУ «Мичуринский агросоциальный колледж»)

УТВЕРЖДАЮ

Директор

«22»

04

О.В. Котельникова

2025 г.

Фонд оценочных средств

учебной дисциплины

ОП.01 Математические методы решения

прикладных профессиональных задач

специальности 35.02.16

Эксплуатация и ремонт сельскохозяйственной техники и оборудования

РАССМОТРЕНО

На заседании методического совета

Протокол № 8 от 22.04. 2025 г.

Фонд оценочных средств разработан на основе Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности СПО 35.02.16 Эксплуатация и ремонт сельскохозяйственной техники и оборудования

Разработчики:

преподаватель ТОГБПОУ «Мичуринский агросоциальный колледж»

Капустянская Ольга Николаевна

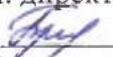
Рассмотрен на заседании предметно-цикловой комиссии УГС 23.00.00, 35.00.00

Протокол № 8 от 22.09 2025 г.

Председатель  С.В. Казанков

Согласовано:

Зам. директора по УПР

 С.Ю. Гусельникова

« 22 » 09 2025 г.

I. Паспорт фонда оценочных средств

1. Область применения фонда оценочных средств

Фонд оценочных средств предназначен для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины ОП.01 Математические методы решения прикладных профессиональных задач

Фонд оценочных средств включает контрольные материалы для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации в форме итоговой контрольной работы.

Фонд оценочных средств разработан на основании:
основной профессиональной образовательной программы по специальности 35.02.20
Технология производства, первичной переработки и хранения сельскохозяйственной продукции, входящей в состав укрупненной группы 35.00.00 Сельское, лесное и рыбное хозяйство;
программы учебной дисциплины ОП.01 Математические методы решения прикладных профессиональных задач

Таблица 1

Наименование объектов контроля и оценки	Основные показатели оценки результата и их критерии	Тип задания; № задания	Форма аттестации (в соответствии с учебным планом)
ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам. ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности. ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях. ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде. ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста. ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное	<i>критерии:</i> - правильность выбора алгоритма решения задач; - степень умения читать графические интерпретации задач; - соблюдение требований и точность построения графических интерпретаций; - не менее 75% правильных ответов. - полнота освоенности программного материала; - полнота и правильность ответа; - степень осознанности, понимания изученного; - языковое оформление ответа; - способность анализировать ситуацию; - способность самостоятельного поиска решения задачи; - выбор	Практических занятий № 1 – 18, задания для контрольных работ № 1, 2	Дифференцированный зачет

поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения; ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях. .	оптимального способа решения задачи. <i>показатели:</i> - степень умения читать графические интерпретации заданий; - соблюдение требований и точность построения графических интерпретаций; - применение геометрических формул для вычислений; - анализ основных величин теории вероятностей и комбинаторики; - вычисление вероятности событий; - выполнение дифференцирования элементарных функций; - вычисление площадей фигур и объёмов тел вращения с помощью определённого интеграла; - решение систем линейных уравнений с применением различных методов; - анализ реальной ситуации; - правильность и рациональность математических расчётов.		
ПК 1.2. Проводить техническое обслуживание сельскохозяйственной техники при эксплуатации, хранении и в особых условиях эксплуатации, в том числе сезонное техническое обслуживание. ПК 2.1. Выполнять обнаружение и локализацию неисправностей сельскохозяйственной техники,	<i>критерии:</i> - правильность выбора алгоритма решения задач; - степень умения читать графические интерпретации задач; - соблюдение требований и точность построения	Практических занятий № 1 – 16, задания для контрольных работ № 1, 2	Дифференцированный зачёт.

а также постановку сельскохозяйственной техники на ремонт. ПК 2.7. Выполнять контроль качества выполнения операций в рамках технического обслуживания и ремонта сельскохозяйственной техники и оборудования.	графических интерпретаций; - не менее 75% правильных ответов. - полнота освоенности программного материала; - полнота и правильность ответа; - степень осознанности, понимания изученного; - языковое оформление ответа; - способность анализировать ситуацию; - способность самостоятельного поиска решения задачи; - выбор оптимального способа решения задачи. <i>показатели:</i> - степень умения читать графические интерпретации заданий; - соблюдение требований и точность построения графических интерпретаций; - применение геометрических формул для вычислений; - анализ основных величин теории вероятностей и комбинаторики; - вычисление вероятности событий; - выполнение дифференцирования элементарных функций; - вычисление площадей фигур и объёмов тел вращения с помощью		
--	---	--	--

	определённого интеграла; - решение систем линейных уравнений с применением различных методов; - анализ реальной ситуации; - правильность и рациональность математических расчётов.		
--	---	--	--

2. Комплект оценочных средств.

ЗАДАНИЕ 1

Практические занятия

Практическое занятие №1

Тема 1.1 Функция одной независимой переменной и ее характеристики.

Название практической работы: «Построение графиков реальных функций».

Ведущая дидактическая цель: формирование практического умения построения графиков реальных функций с помощью графиков элементарных функций.

Формируемые ОК:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях.

Формируемые ПК (элементы ПК):

ПК 1.1. Планировать работу растениеводческих бригад (звеньев, работников) по выполнению полевых работ.

ПК 1.6 Формировать первичную отчетность по результатам выполнения работ, в том числе в электронном виде.

ПК 2.1. Планировать выполнение работ по получению, первичной обработке, хранению продукции животноводства в соответствии с технологическими картами, регламентами.

ПК 2.6. Формировать первичную отчетность по содержанию и разведению сельскохозяйственных животных, учёту продукции животноводства, в том числе в электронном виде.

Учебные материалы: карточки с заданиями практической работы, карточки с контрольными вопросами.

Содержание работы: записать теоретическую часть и решить задачи практической работы.

Характер выполнения работы: репродуктивный, поисковый

Форма организации занятия: фронтальная, индивидуально – групповая.

Теоретическая часть практического занятия:

1. Определение функции. **Функцией** $y=f(x)$ называется такая зависимость y от x , при которой каждому значению x соответствует единственное значение y (x – независимая переменная, y – зависимая переменная).

Пример 1. Функция задана схемой. Пусть X – множество жильцов в подъезде многоквартирного дома, Y – множество квартир в подъезде.

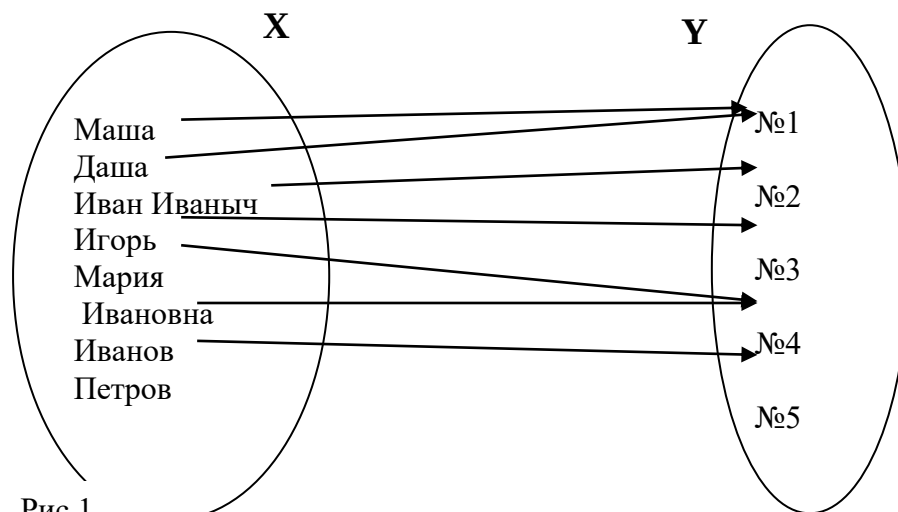


Рис.1

На схеме видно, что каждому жильцу соответствует единственная квартира. И состояние каждой квартиры зависит от жильца, следовательно, X - независимая переменная Y - зависимая переменная.

2. **Способы задания функции:**

- Схематический (пр.1);
- Аналитический (формула). Примеры, $y=3x^2$; $y=2x+3$.
- Графический.
- Табличный.

График функции $y=f(x)$ - это множество точек с координатами $(x;f(x))$ на координатной плоскости.

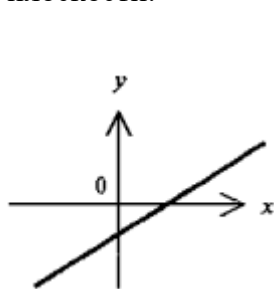


Рис.2

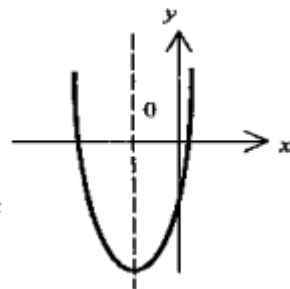


Рис.3

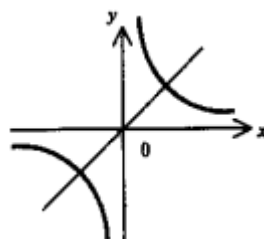


Рис.4

Задание 1. Определите, на каких рисунках изображена функция.

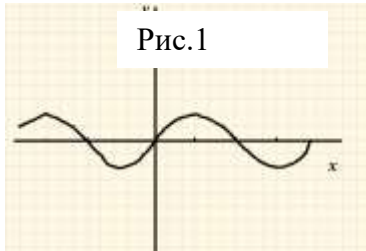
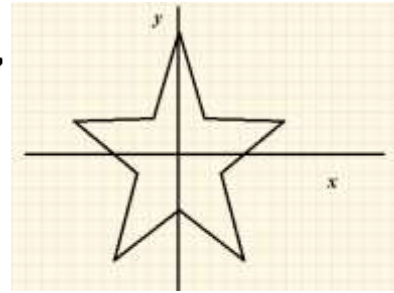
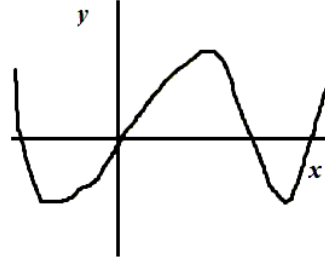
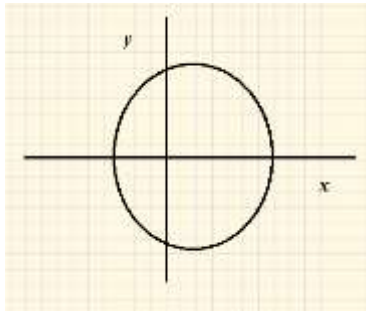


Рис.1

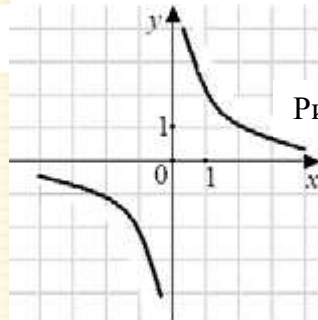


Рис.2

Свойства функции

1. *Область определения функции* $D(f)$ - множество значений независимой переменной x (аргумента x), при которых задана функция $y = f(x)$.

В примере 1 областью определения функции является множество жильцов, т.е.

$D(f) = \{\text{Маша, Даша, Иван Иванович, Игорь, Мария, Ивановна, Иванов, Петров}\}$

На координатной плоскости область определения - проекция графика на ось Ox .

Задание. Определите область определения функций изображённых на рисунках 2, 3, 4.

2. *Множество значений функции*, т. е. множество чисел, состоящее из всех значений функции.

В примере 1 множество значений функции состоит из множества квартир.

$E(f) = \{\text{№1, №2, №3, №4, №5}\}$.

На координатной плоскости множество значений – это проекция графика на ось Oy .

3. *Промежутки монотонности*, т. е. промежутки, на которых функция или возрастает, или убывает. Участки оси x , где график идёт вверх или вниз.

Определение. Функция $y = f(x)$ возрастает на интервале $D(f)$, если выполняются условия: $x_1, x_2 \in D(f), x_1 < x_2, f(x_1) < f(x_2)$

Функция возрастает, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Определение. Функция $y = f(x)$ убывает на интервале $D(f)$, если выполняются условия: $x_1, x_2 \in D(f), x_1 < x_2, f(x_1) > f(x_2)$

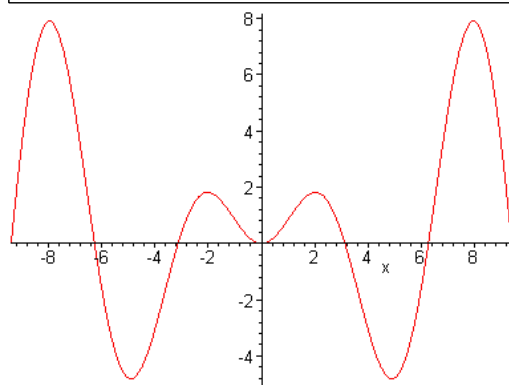
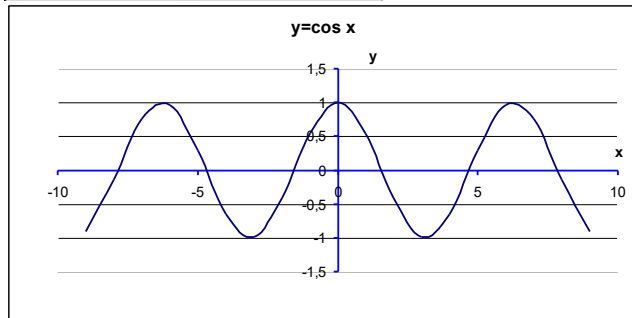
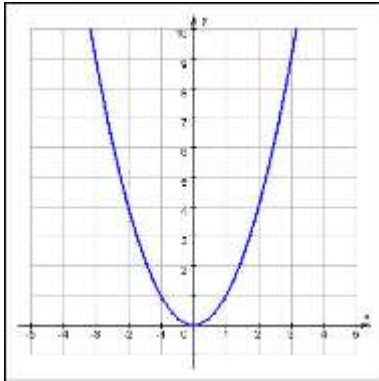
Функция убывает, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

4. *Чётность функции.* Функция называется чётной, если выполняются два условия:

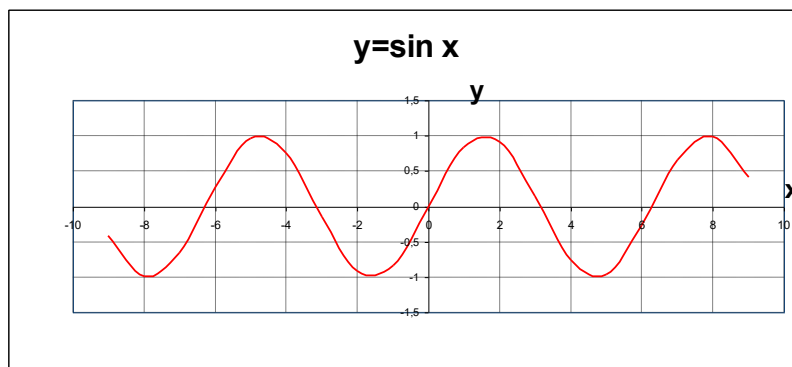
область определения симметрична относительно начала координат;

$f(-x) = f(x)$.

Примеры. $y = x^2, y = \cos x$. Графики чётных функций симметричны относительно оси y .



Функция называется нечётной, если выполняются два условия: область определения симметрична относительно начала координат; $f(-x) = -f(x)$.
Примеры. $y = x^3$, $y = \sin x$.



5. Нули функции, т. е. точки, в которых функция обращается в нуль, или иначе решения уравнения $f(x) = 0$. Точки пересечения графика с осью x .

6. Промежутки постоянного знака, т. е. промежутки, на которых функция положительна или отрицательна), или иначе решения неравенства $f(x) > 0$, $f(x) < 0$. Участки оси x , соответствующие точкам графика, лежащим выше (ниже) оси x .

7. Точки экстремума, т. е. точки, лежащие внутри области определения, в которых функция принимает самое большое (максимум) или самое маленькое (минимум) значение по сравнению со значениями в близких точках. «Вершины» на графике функции.

8. Промежутки монотонности, т. е. промежутки, на которых функция или возрастает, или убывает. Участки оси x , где график идёт вверх или вниз.

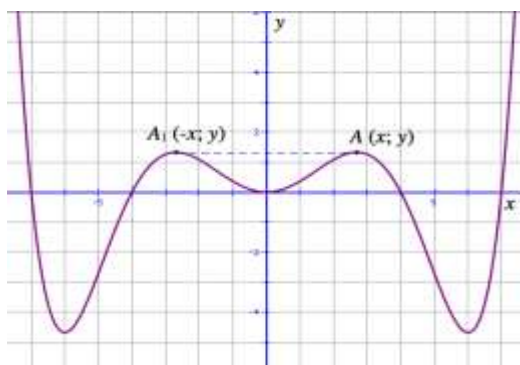
9. Наибольшее и наименьшее значения функции (по сравнению со всеми возможными в отличие от экстремумов, где сравнение ведётся только с близкими точками). Ординаты самой высокой и самой низкой точек графика.

2. Периодичность функции. Функция называется периодической, если её значение не меняется при изменении аргумента на определенное положительное число T , не равное нулю, $f(x + T) = f(x)$. Это число T называется периодом. У периодической функции всегда есть бесконечно много разных периодов. Если T - период, то $2T$, $3T$, $4T$ - тоже периоды. Наименьший из периодов называется главным или основным периодом.

Из элементарных функций периодическими являются все тригонометрические функции.

Для того, чтобы проверить, является ли функция периодической, необходимо решить уравнение $f(x + T) = f(x)$ относительно T . Если получится T , не зависящее от x , то функция является периодической, иначе не является.

Задача. Исследуйте график функции и запишите её свойства.



Задания для практического занятия:

1. Исследовать функции и построить их графики.

Вариант 1.

1. а) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$ б) $y = x^3 - 9x^2 - 24x + 12$; в) $y = \frac{x}{x^2 - 4}$;

Вариант 2.

1. а) $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - \frac{4}{3}$ б) $y = -x^3 + 6x^2 + 24x - 5$; в) $y = \frac{x-3}{x^2-8}$;

Вариант 3.

1. а) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6$ б) $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 1$; в) $y = \frac{2x+1}{x^2+2}$;

Задания для закрепления:

1. Что такое область определения и область значений функции?

2. Какая функция является чётной (нечётной)?

3. Что такое экстремумы функции?

4. Условия существования максимума и минимума функции.
5. Как найти точку перегиба графика?
6. Условия выпуклости графика функции.

Список рекомендуемой литературы:

1. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник. – 3 –е изд., стереотип. – М: Издательский центр «Академия»; Мастерство, 2021. – 304 с.
2. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике: Учеб. пособие для сред. проф. образования. – 3 –е изд., перераб. М: издат. Центр «Академия», 2022
3. Башмаков М.И. Математика: учебник для учреждений начального и среднего профессионального образования.- М.: издательский центр «Академия», 2021
4. П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т.Л. Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах.- М.: Высшая школа, 2020,
5. Дадаян, А. А. Сборник задач по математике: учебное пособие / А. А. Дадаян. - 3-е изд. - Москва: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2021. - 352 с. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-91134-803-8. - Текст: электронный. <https://e.lanbook.com/book/2579123>

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Практическое занятие №2

Тема 1.1 Функция одной независимой переменной и ее характеристики.

Название практической работы: «Построение графиков реальных функций с помощью геометрических преобразований».

Ведущая дидактическая цель: формирование практического умения построения графиков функций с помощью графиков элементарных функций преобразованием в системе координат.

Формируемые ОК:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе

с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях.

Формируемые ПК (элементы ПК):

ПК 1.1. Планировать работу растениеводческих бригад (звеньев, работников) по выполнению полевых работ.

ПК 1.6 Формировать первичную отчетность по результатам выполнения работ, в том числе в электронном виде.

ПК 2.1. Планировать выполнение работ по получению, первичной обработке, хранению продукции животноводства в соответствии с технологическими картами, регламентами.

ПК 2.6. Формировать первичную отчетность по содержанию и разведению сельскохозяйственных животных, учёту продукции животноводства, в том числе в электронном виде.

Учебные материалы: карточки с заданиями практической работы, карточки с контрольными вопросами.

Содержание работы: записать теоретическую часть и решить задачи практической работы.

Характер выполнения работы: репродуктивный, поисковый

Форма организации занятия: фронтальная, индивидуально – групповая.

Теоретическая часть практического занятия:

Пусть задан график функции $y = f(x)$. Чтобы построить график функции

1. $y = mf(x)$, где $m > 0$ и $m \neq 1$, нужно ординаты точек заданного графика умножить на m . Такое преобразование называется растяжением от оси x с коэффициентом m , если $m > 1$, и сжатием к оси x , если $0 < m < 1$.

2. $y = -f(x)$ получается из графика функции $f(x)$ преобразованием симметрии относительно оси x . (Преобразование симметрии – зеркальное отражение относительно прямой.)

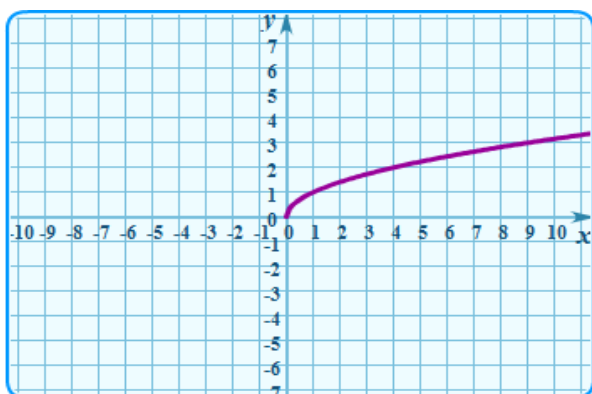
3. $y = f(x) + n$, получается из графика функции $f(x)$ параллельным переносом последнего вдоль оси ординат на n единиц вверх, если $n > 0$ и, соответственно на $|n|$ единиц вниз, если $n < 0$.

4. $y = f(kx)$, где $k > 0$ и $k \neq 1$. Искомый график функции получается из заданного сжатием с коэффициентом k к оси y (если $0 < k < 1$ указанное "сжатие" фактически является растяжением с коэффициентом $1/k$)

5. $y = f(-x)$ получается из графика функции $f(x)$ преобразованием симметрии относительно оси y

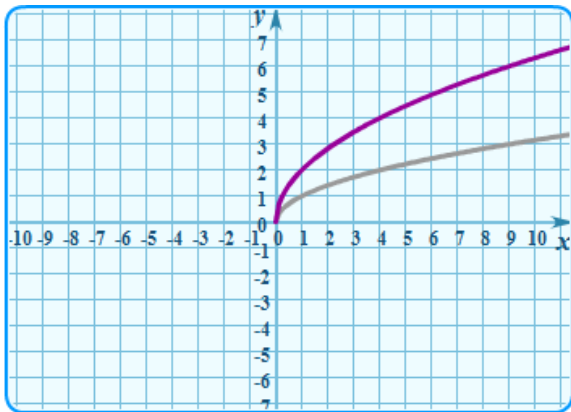
6. $y = f(x + l)$ получается из графика функции $f(x)$ параллельным переносом последнего на l единиц влево, если $l > 0$ и, соответственно на $|l|$ единиц вправо, если $l < 0$.

Например, пусть задан график функции $y = \sqrt{x}$.



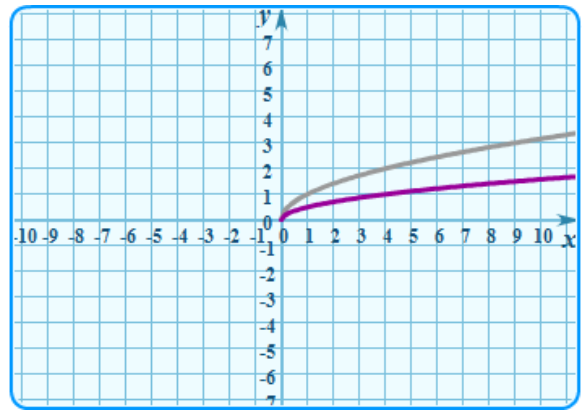
Чтобы построить графики других функций, содержащих аргумент (x) под знаком квадратного корня, воспользуемся перечисленными выше правилами. Заданный график повторим во вновь начерченных осях "карандашом бледно", требуемый график, который получится после преобразований, сделаем более интенсивным. В тетради лишнее можно будет удалить ластиком, останется только результат выполнения задания.

Пример 1а. Построить график функции $y = 2\sqrt{x}$



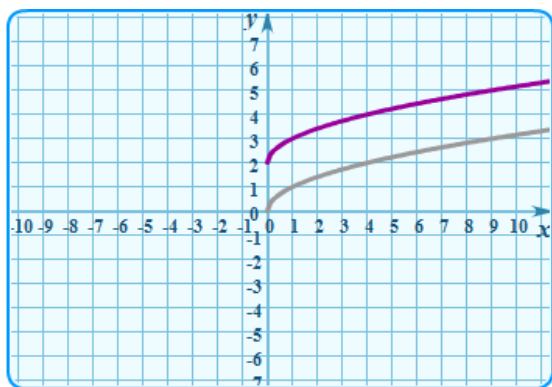
Растянули в 2 раза от оси x . Ордината каждой точки увеличилась в 2 раза.

Пример 1б. Построить график функции $y = \sqrt{x}/2$



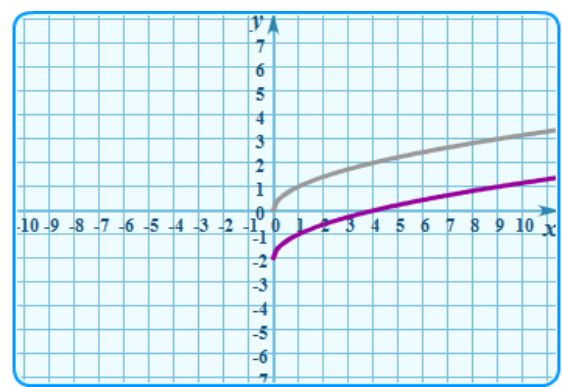
Сжали вдвое к оси x . Ордината каждой точки уменьшилась в 2 раза.

Пример 3а. Построить график функции $y = \sqrt{x} + 2$



Параллельно перенесли на 2 единицы вверх вдоль оси y . Ордината каждой точки увеличилась на 2.

Пример 3б. Построить график функции $y = \sqrt{x} - 2$

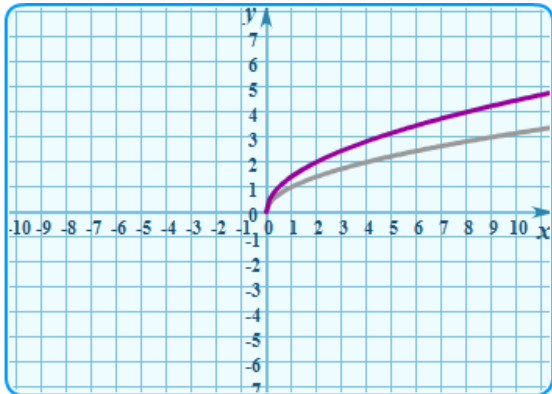


Параллельно перенесли на 2 единицы вниз вдоль оси y . Ордината каждой точки уменьшилась на 2 единицы.

Пример 4а. Построить график

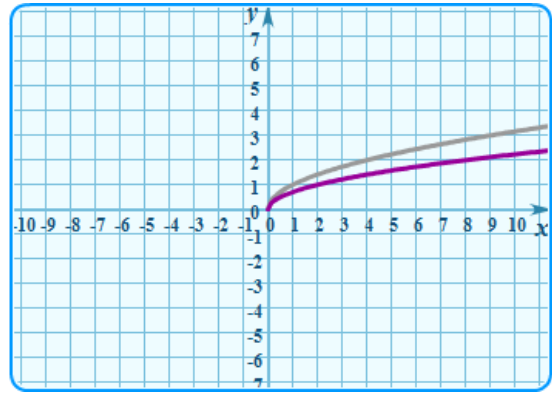
Пример 4б. Построить график

функции $y = \sqrt{2x}$



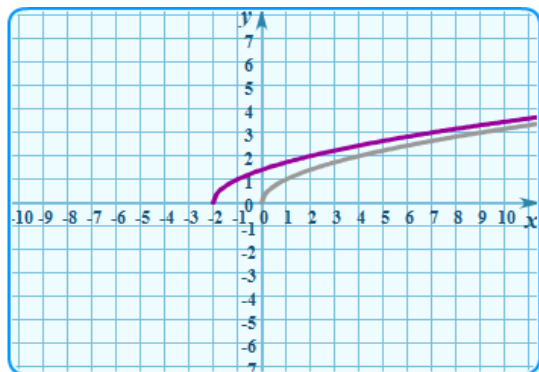
Сжали вдвое к оси y . Абсцисса каждой точки уменьшилась в 2 раза.

функции $y = \sqrt{x/2}$



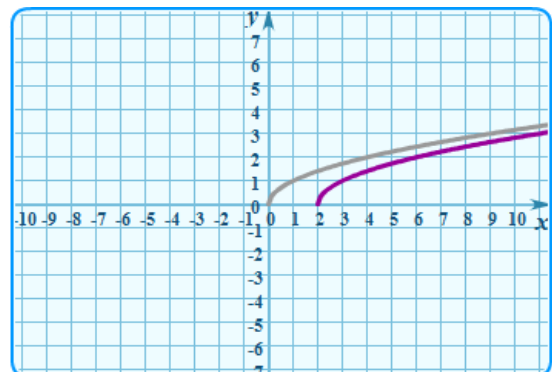
Растянули в 2 раза от оси y . Абсцисса каждой точки увеличилась в 2 раза.

Пример 6а. Построить график функции $y = \sqrt{x+2}$



Параллельно перенесли на 2 единицы влево вдоль оси x . Абсцисса каждой точки уменьшилась на 2 единицы.

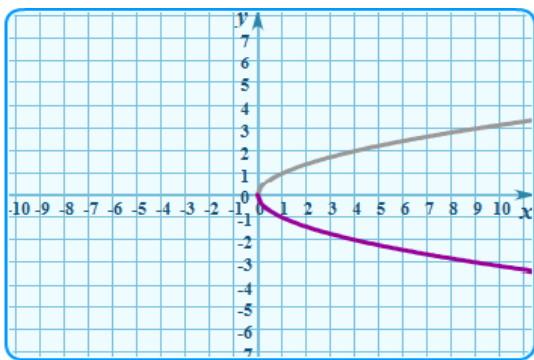
Пример 6б. Построить график функции $y = \sqrt{x-2}$



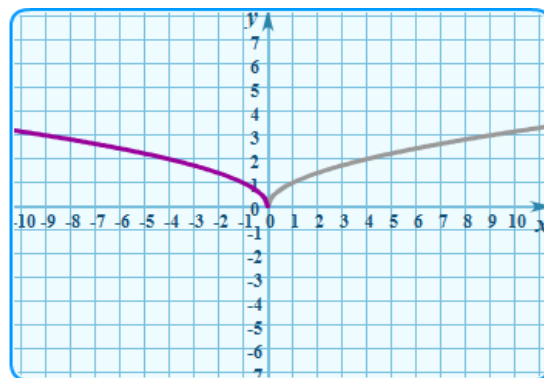
Параллельно перенесли на 2 единицы вправо вдоль оси x . Абсцисса каждой точки увеличилась на 2 единицы.

Пример 2. Построить график функции $y = -\sqrt{x}$

Пример 5. Построить график функции $y = \sqrt{-x}$



Применили преобразование симметрии — зеркально отразили относительно оси x .



Применили преобразование симметрии — зеркально отразили относительно оси y .

Заметим, что параллельный перенос графика относительно одной из осей в какую-либо сторону равносильен переносу этой оси относительно графика в противоположную сторону. Поэтому 3-е и 6-е правила можно объединить следующим образом: чтобы построить график функции $y = f(x - m) + n$ нужно выполнить параллельный перенос всей плоскости координат так, чтобы началом новой системы координат $x'y'$ была точка $O'(m;n)$. Очевидно, что вместо того, чтобы дважды перерисовывать график, проще перечертить оси.

Если нужно скомбинировать только параллельные переносы, чтобы построить график функции, то всё равно в каком порядке их выполнять, и всё равно, что переносить - оси или кривые. Но если нужно построить график сложной функции, используя и перенос, и растяжение-сжатие, и отражения, то следует тщательно соблюдать порядок выполнения операций.

Задания для практического занятия:

1. Постройте график зависимости крутящего момента автомобильного двигателя от числа его оборотов в минуту, задаваемый формулой $y = -(x - 400)^2 + 140$ где y – крутящийся момент, x - число оборотов в минуту. На оси абсцисс отложите число оборотов в минуту; на оси ординат – крутящийся момент в Н м. По графику функции определите, какое наименьшее число оборотов двигателя в минуту достаточно, чтобы автомобиль начал движение (крутящийся момент должен быть не менее 60 Нм)?
2. Постройте график зависимости процесса разогрева двигателя легкового автомобиля, задаваемого формулой $T = -(t - 8)^2 + 90$, где T - температура двигателя, t - время. На оси абсцисс отложите время в минутах, прошедшее от запуска двигателя, на оси ординат — температуру двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, сколько минут двигатель нагревался от температуры 60°C до температуры 90 С.

Задания для закрепления:

Построить график функции:

1. Постройте график зависимости крутящего момента автомобильного двигателя от числа его оборотов в минуту, задаваемый формулой $y = -(x - 400)^2 + 140$ где y – крутящийся момент, x - число оборотов в минуту. На оси абсцисс отложите число оборотов в минуту; на оси ординат – крутящийся момент в Н м. По графику функции определите, какое наименьшее число оборотов двигателя в минуту достаточно, чтобы автомобиль начал движение (крутящийся момент должен быть не менее 60 Нм)?

2. Постройте график зависимости процесса разогрева двигателя легкового автомобиля, задаваемого формулой $T = -(t-8)^2 + 90$, где T – температура двигателя, t – время. На оси абсцисс отложите время в минутах, прошедшее от запуска двигателя, на оси ординат — температуру двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, сколько минут двигатель нагревался от температуры 60°C до температуры 90 С.

Список рекомендуемой литературы:

1. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник. – 3 –е изд., стереотип. – М: Издательский центр «Академия»; Мастерство, 2021. – 304 с.
2. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике: Учеб. пособие для сред. проф. образования. – 3 –е изд., перераб. М: издат. Центр «Академия», 2022
3. Башмаков М.И. Математика: учебник для учреждений начального и среднего профессионального образования.- М.: издательский центр «Академия», 2021
4. П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т.Л. Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах.- М.: Высшая школа, 2020,
5. Дадаян, А. А. Сборник задач по математике: учебное пособие / А. А. Дадаян. - 3-е изд. - Москва: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2021. - 352 с. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-91134-803-8. - Текст: электронный. <https://e.lanbook.com/book/2579123>

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Практическое занятие №3.

Тема 1.2 Предел функции. Непрерывность функции.

Название практической работы: «Нахождение пределов функций».

Ведущая дидактическая цель: отработка навыков по вычислению пределов функций с помощью раскрытия неопределённостей.

Формируемые ОК:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x}-3}{x-7} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(\sqrt{2+x}-3)(\sqrt{2+x}+3)}{(x-7)(\sqrt{2+x}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2+x-9}{(x-7)(\sqrt{2+x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{\sqrt{2+x}+3} = 1.\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 64}{8(\sqrt[3]{x} - 2)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x^2 - 64)(\sqrt[3]{x}^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{8(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt[3]{x}^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x-8)(x+8)(\sqrt[3]{x}^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{8(x-8)} = \frac{16 \cdot 12}{8} = 24.$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\sin 3x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \left(\frac{3x}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{3x}{2} \right) \cos \left(\frac{3x}{2} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\frac{3x}{2} \right)}{\cos \left(\frac{3x}{2} \right)} = 0.$$

5.

$$\frac{\infty}{\infty}.$$

II. Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 5x}{x^4 + x^2 - 2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{5}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^4}} = \frac{3 - 0}{1 + 0 - 0} = 3.$$

1.

При вычислении предела числитель и знаменатель данной дроби разделили на x в старшей степени.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x^3 + x}{x^5 + 3x^3 - 2x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^5} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{1 + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^4}} = \frac{0 - 0 + 0}{1 + 0 - 0} = 0.$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 3}{x + 2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = \left[\frac{1 - 0 + 0}{0 + 0} \right] = \infty.$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \sqrt{2x^2 - 1}}{x - 5} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} - \sqrt{2 - \frac{1}{x^2}}}{1 - \frac{5}{x}} = \left[\frac{0 - \sqrt{2 - 0}}{1 - 0} \right] = -\sqrt{2}.$$

4.

При вычислении предела воспользовались равенством $\sqrt{x^2} = -x$, если $x < 0$.

Следующие виды неопределенностей с помощью алгебраических преобразований функции,

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

стоящей под знаком предела, сводят к одному из рассмотренных выше случаев $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

III. Неопределенность $0 \cdot \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \sin 2x \cdot \operatorname{ctg} x = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos x}{\sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow \pi} 2 \cos^2 x = 2.$$

IV. Неопределенность $\infty - \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x}) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + 5x})(x + \sqrt{x^2 + 5x})}{(x + \sqrt{x^2 + 5x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x}{(x + \sqrt{x^2 + 5x})} =$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5}{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{5}{x}} \right)} = \frac{-5}{1 + 1} = -2,5.$$

1.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1 - x^3} - \frac{1}{1 - x} \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{(1 - x)(1 + x + x^2)} - \frac{1}{1 - x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - 1 - x - x^2}{(1 - x)(1 + x + x^2)} =$$

2.

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - x - x^2}{(1 - x)(1 + x + x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x - 1)(x + 2)}{(1 - x)(1 + x + x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x + 2)}{1 + x + x^2} = -1.$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = [\infty + \infty] = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20} - 1}{x^{10} - 1}$$

Вычислить предел .

Решение.

Подставив напрямую значение $x = 1$, убеждаемся, что данная функция имеет

неопределенность $\frac{0}{0}$ в точке $x = 1$. Разложив числитель на множители, получаем

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20} - 1}{x^{10} - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{10})^2 - 1}{x^{10} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{10} - 1)(x^{10} + 1)}{x^{10} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^{10} + 1) = 1^{10} + 1 = 2.$$

Задания для практического занятия:

№	Задание: вычислите пределы функций.
1	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x - 2}{2x^2 - 2x + 1}$
2	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 12}{4x + 5}$
3	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x + 2}$;
4	$\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 4x + 3)$;
5	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 16}{x + 2}$;
6	$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 3x + 1} \right)$;
7	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^x$.

Задания для закрепления:

1. Что называется пределом функции?
2. Расскажите правило нахождения простейших пределов.
3. Как найти предел функции в точке?
4. Всегда ли можно применить правило нахождения пределов последовательности для нахождения пределов функции?

Список рекомендуемой литературы:

1. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник. – 3 –е изд., стереотип. – М: Издательский центр «Академия»; Мастерство, 2021. – 304 с.
2. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике: Учеб. пособие для сред. проф. образования. – 3 –е изд., перераб. М: издат. Центр «Академия», 2022
3. Башмаков М.И. Математика: учебник для учреждений начального и среднего профессионального образования.- М.: издательский центр «Академия», 2021
4. П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т.Л. Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах.- М.: Высшая школа, 2020,
5. Дадаян, А. А. Сборник задач по математике: учебное пособие / А. А. Дадаян. - 3-е изд. - Москва: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2021. - 352 с. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-91134-803-8. - Текст: электронный. <https://e.lanbook.com/book/2579123>

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Практическое занятие №4.

Тема 1.2 Предел функции. Непрерывность функции.

Название практической работы: «Нахождение пределов функций с помощью замечательных пределов».

Ведущая дидактическая цель: закрепить навыки применения первого и второго замечательных пределов.

Формируемые ОК:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях.

Формируемые ПК (элементы ПК):

ПК 1.1. Планировать работу растениеводческих бригад (звеньев, работников) по выполнению полевых работ.

ПК 1.6 Формировать первичную отчетность по результатам выполнения работ, в том числе в электронном виде.

ПК 2.1. Планировать выполнение работ по получению, первичной обработке, хранению продукции животноводства в соответствии с технологическими картами, регламентами.

ПК 2.6. Формировать первичную отчетность по содержанию и разведению сельскохозяйственных животных, учёту продукции животноводства, в том числе в электронном виде.

Учебные материалы: карточки с заданиями практической работы, карточки с контрольными вопросами.

Содержание работы: записать теоретическую часть и решить задачи практической работы.

Характер выполнения работы: репродуктивный, поисковый

Форма организации занятия: фронтальная, индивидуально – групповая.

Теоретическая часть практического занятия:

Пусть существует последовательность действительных чисел $\{a_n \in \mathbb{R}: n \geq 1\}$.

Число a называется **пределом последовательности**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \\ \forall n > n_0 \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

Число A называют **пределом функции** $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ (и пишут $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, такое, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Теоремы о пределах:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ ($c = \text{const}$).
- Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$, то:
 $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A \pm B$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = AB$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)} = \frac{A}{B}$ ($B \neq 0$).

При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используют предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 - \text{первый замечательный предел};$$

При вычислении пределов выражений, содержащих показательные функции с основанием e , обычно используют равенства:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e - \text{второй замечательный предел};$$

Число e – иррациональное, $e \approx 2,7182818... \approx 2,718$.

При вычислении замечательных пределов для раскрытия неопределённости вида $[0/0]$ нередко применяют принцип замены бесконечно малых функций эквивалентными. А именно: $\sin x \sim x$ при $x \rightarrow 0$, $\tan x \sim x$ при $x \rightarrow 0$.

Приведем примеры часто встречающихся методов вычисления замечательных пределов.

Пример 1. Найти предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3+x}{3}\right)^{1/x}$;

Решение:

Выполнив преобразования и используя формулу $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$, находим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3+x}{3}\right)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{3}\right)^{3/(x \cdot 1/3)} = \left[\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{3}\right)^{3/x} \right]^{1/3} = e^{1/3} = \sqrt[3]{e}.$$

Пример 2. Найти предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$;

Решение: Выполнив преобразования и используя формулу $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, находим:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3/3}{x/3}\right)^{(x/3) \cdot 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x/3}\right)^{(x/3)}\right]^3 = e^3.$$

Пример 3. Найти предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$;

Решение: В данном случае пределы числителя и знаменателя при $x \rightarrow 0$ равны нулю, имеем неопределенность вида $[0/0]$. Введём замену $3x = t$, тогда при

$x \rightarrow 0$ переменная $t \rightarrow 0$, поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{2 \cdot t/3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin t}{t} = \frac{3}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2};$$

Задания для практического занятия:

Найти замечательные пределы функций.

Вариант 1.

- $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x)^{7/2x}$;
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{x}\right)^x$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$;

Вариант 2.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{5/x}$; 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+1}{5x} \right)^x$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x^2}$;

Вариант 3.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 8x)^{3/4x}$; 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3x} \right)^{3x}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x}$;

Задания для закрепления:

1. Запишите первый замечательный предел.
2. Запишите второй замечательный предел.
3. Объясните принцип эквивалентности бесконечно малых функций.

Список рекомендуемой литературы:

1. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник. – 3 –е изд., стереотип. – М: Издательский центр «Академия»; Мастерство, 2021. – 304 с.
2. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике: Учеб. пособие для сред. проф. образования. – 3 –е изд., перераб. М: издат. Центр «Академия», 2022
3. Башмаков М.И. Математика: учебник для учреждений начального и среднего профессионального образования.- М.: издательский центр «Академия», 2021
4. П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т.Л. Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах.- М.: Высшая школа, 2020,
5. Дадаян, А. А. Сборник задач по математике: учебное пособие / А. А. Дадаян. - 3-е изд. - Москва: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2021. - 352 с. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-91134-803-8. - Текст: электронный. <https://e.lanbook.com/book/2579123>

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Практическое занятие №5

Тема 1.3 Дифференциальное и интегральное исчисления.

Название практической работы: «Вычисление производных функций».

Ведущая дидактическая цель: формирование практического умения вычисления производных функций.

Формируемые ОК:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях.

Формируемые ПК (элементы ПК):

ПК 1.1. Планировать работу растениеводческих бригад (звеньев, работников) по выполнению полевых работ.

ПК 1.6 Формировать первичную отчетность по результатам выполнения работ, в том числе в электронном виде.

ПК 2.1. Планировать выполнение работ по получению, первичной обработке, хранению продукции животноводства в соответствии с технологическими картами, регламентами.

ПК 2.6. Формировать первичную отчетность по содержанию и разведению сельскохозяйственных животных, учёту продукции животноводства, в том числе в электронном виде.

Учебные материалы: карточки с заданиями практической работы, карточки с контрольными вопросами.

Содержание работы: записать теоретическую часть и решить задачи практической работы.

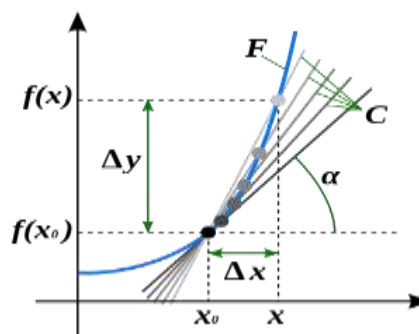
Характер выполнения работы: репродуктивный, поисковый

Форма организации занятия: фронтальная, индивидуально – групповая.

Теоретическая часть практического занятия:

Производная (функции в точке) — основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции (в данной точке). Определяется как **предел отношения** приращения функции к приращению ее аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует. Функцию, имеющую конечную производную (в некоторой точке), называют дифференцируемой (в данной точке). Процесс вычисления производной называется **дифференцированием**. Обратный процесс — нахождение первообразной — интегрирование.

Иллюстрация понятия производной



Определение производной функции через предел

Пусть в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$ определена функция $f: U(x_0) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Производной функции f в точке x_0 называется предел, если он существует,

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Общепринятые обозначения производной функции $y = f(x)$ в точке x_0

$$f'(x_0) = f'_x(x_0) = Df(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = \dot{y}(x_0).$$

Заметим, что последнее обычно обозначает производную по времени (в теоретической механике).

Таблица формул дифференцирования:

- | | |
|-----------------------------|--------------------------------------|
| 1. $c' = 0$ | 7. $(kx + b)' = k$ |
| 2. $x' = 1, \quad u' = 1$ | 8. $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ |
| 3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$ | 9. $(cu)' = cu'$ |
| 4. $(uv)' = u'v + v'u'$ | 10. $(f(g(x)))' = f'(x) \cdot g'(x)$ |

$$5. \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

$$11. (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}};$$

$$6. \left(\frac{c}{v} \right)' = -\frac{cv'}{v^2}.$$

Здесь u и v - дифференцируемые функции от x , а C – постоянная величина.

Рассмотрим технику вычисления производных функций на конкретных примерах.

Пример 1. Найти производную функции при данном значении аргумента:

$$y = 5x^3 + 2x^2 - 6x + 7, \quad y'(-1);$$

Решение:

1. Применяв последовательно правила дифференцирования суммы и степени: $(u + v)' = u' + v'$; $(x^n)' = nx^{n-1}$, имеем:

$$y' = (5x^3 + 2x^2 - 6x + 7)' = (5x^3)' + (2x^2)' - (6x)' + 7' = 5(x^3)' + 2(x^2)' - 6(x)' + 7' = 5 \cdot 3x^2 +$$

$$+ 2 \cdot 2x - 6 \cdot 1 + 0 = 15x^2 + 4x - 6;$$

$$y'(-1) = 15(-1)^2 + 4(-1) - 6 = 15 - 4 - 6 = 5$$

Пример 2. Найти производную функции при данном значении аргумента:

$$y = 2x^3 \sqrt{x^2 - 1}, \quad y'(2);$$

Решение:

Применив правило дифференцирования произведения: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, имеем:

$$y' = (2x^3 \cdot \sqrt{x^2 - 1})' = (2x^3)' \sqrt{x^2 - 1} + 2x^3 (\sqrt{x^2 - 1})' = 2 \cdot 3x^2 \sqrt{x^2 - 1} + 2x^3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} (x^2 - 1)' =$$

$$= 6x^2 \sqrt{x^2 - 1} + \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 1}} 2x = \frac{6x^2 (x^2 - 1) + 2x^4}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{6x^4 - 6x^2 + 2x^4}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{8x^4 - 6x^2}{\sqrt{x^2 - 1}};$$

$$y'(2) = \frac{8 \cdot 2^4 - 6 \cdot 2^2}{\sqrt{2^2 - 1}} = \frac{128 - 24}{\sqrt{3}} = \frac{104}{\sqrt{3}}.$$

Пример 3. Найти производную функции при данном значении аргумента:

$$y = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2}, \quad y'(1).$$

Решение: Применяв правило дифференцирования частного: $\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, имеем:

$$y' = \left(\frac{x^2 - 2}{x^2 + 2} \right)' = \frac{(x^2 - 2)'(x^2 + 2) - (x^2 - 2)(x^2 + 2)'}{(x^2 + 2)^2} = \frac{2x(x^2 + 2) - (x^2 - 2)2x}{(x^2 + 2)^2} =$$

$$= \frac{2x^3 + 4x - 2x^3 + 4x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{8x}{(x^2 + 2)^2}; \quad y'(1) = \frac{8 \cdot 1}{(1^2 + 2)^2} = \frac{8}{9}.$$

Если $y = f(x)$ и $u = \varphi(x)$ – дифференцируемые функции своих аргументов, то производная сложной функции $y = f(\varphi(x))$ существует и равна произведению производной функции y по промежуточному аргументу u на производную промежуточного аргумента u по независимой переменной x :

$$y_x' = y_u' \cdot u_x';$$

Аналогичная формула верна и для сложных функций, которые задаются с помощью цепочки, содержащей три звена и более.

Пример 4. Найти производную функции при данном значении аргумента:

$$y = \sqrt{(2x^3 + 10)^3}, \quad y'(3);$$

Решение: Преобразуем коренную функцию по свойству $\sqrt[n]{u^m} = u^{m/n}$ и продифференцируем её по формуле $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$:

$$y' = \sqrt{(2x^3 + 10)^3} = ((2x^3 + 10)^{3/2})' = \frac{3}{2}(2x^3 + 10)^{3/2-1} \cdot (2x^3 + 10)' = \frac{3}{2}(2x^3 + 10)^{1/2} \cdot 6x^2 = 9x^2 \cdot (2x^3 + 10)^{1/2} = 9x^2 \cdot \sqrt{2x^3 + 10}; \quad y'(3) = 9 \cdot 3^2 \cdot \sqrt{2 \cdot 3^3 + 10} = 648.$$

Задания для практического занятия:

Найти производные функций при данном значении аргумента.

Вариант 1.

1. $y(x) = 5x^4 - \frac{2x}{\sqrt{x}} + 3\sqrt[3]{x} + 7$; $y'(2)$.
2. $y(x) = (x+1)\sqrt{x-1}$; $y'(5)$.
3. $y(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x}$; $y'(3)$.
4. $y = \sqrt{(3x^2 + 5)^3}$, $y'(2)$;

Вариант 2.

1. $y(x) = 6x^3 - \frac{5x}{\sqrt{x}} + 4x^2 - 12$; $y'(1)$.
2. $y(x) = (x+2)\sqrt{2x-1}$; $y'(4)$.
3. $y(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2}$; $y'(1)$.
4. $y = (12x^3 + 4x)^5$, $y'(3)$;

Вариант 3.

1. $y(x) = 2x^2 + \sqrt{x} - 4x + 11 + \frac{1}{x}$; $y'(1)$.
2. $y(x) = (x-1)\sqrt{x^2-1}$; $y'(2)$.
3. $y(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$; $y'(\sqrt{5})$.
4. $y = \sqrt[3]{(2x^3 - 4x)^4}$, $y'(1)$;

Задания для закрепления:

1. Дайте определение производной.
2. Как называется действие нахождения производной?
3. Запишите формулу производной суммы.
4. Запишите формулу производной произведения.
5. Запишите формулу производной частного.
6. Чему равна производная константы.
7. Выучите формулы производных элементарных функций.
8. Как вычислить производную сложной функции?

Список рекомендуемой литературы:

1. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник. – 3 –е изд., стереотип. – М: Издательский центр «Академия»; Мастерство, 2021. – 304 с.
2. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике: Учеб. пособие для сред. проф. образования. – 3 –е изд., перераб. М: издат. Центр «Академия», 2022
3. Башмаков М.И. Математика: учебник для учреждений начального и среднего профессионального образования.- М.: издательский центр «Академия», 2021
4. П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т.Л. Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах.- М.: Высшая школа, 2020,
5. Дадаян, А. А. Сборник задач по математике: учебное пособие / А. А. Дадаян. - 3-е изд. - Москва: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2021. - 352 с. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-91134-803-8. - Текст: электронный. <https://e.lanbook.com/book/2579123>

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Практическое занятие № 6.

Тема 1.3 Дифференциальное и интегральное исчисления.

Название практической работы: «Применение производной к решению практических задач».

Ведущая дидактическая цель: формирование практического умения вычисления производных функций при решении практических задач.

Формируемые ОК:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях.

Формируемые ПК (элементы ПК):

ПК 1.1. Планировать работу растениеводческих бригад (звеньев, работников) по выполнению полевых работ.

ПК 1.6 Формировать первичную отчетность по результатам выполнения работ, в том числе в электронном виде.

ПК 2.1. Планировать выполнение работ по получению, первичной обработке, хранению продукции животноводства в соответствии с технологическими картами, регламентами.

ПК 2.6. Формировать первичную отчетность по содержанию и разведению сельскохозяйственных животных, учёту продукции животноводства, в том числе в электронном виде.

Учебные материалы: карточки с заданиями практической работы, карточки с контрольными вопросами.

Содержание работы: записать теоретическую часть и решить задачи практической работы.

Характер выполнения работы: репродуктивный, поисковый

Форма организации занятия: фронтальная, индивидуально – групповая.

Теоретическая часть практического занятия:

1. Наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $y = f(x)$, непрерывной на некотором промежутке $[a;b]$, необходимо:

- 1) Найти производную функции y' .
- 2) Найти критические точки – точки, в которых $y' = 0$.
- 3) Отобрать критические точки, лежащие внутри промежутка $[a;b]$.
- 4) Вычислить значения функций в выбранных точках и на концах промежутка $[a;b]$.
- 5) Из полученных значений определить наибольшее и наименьшее значения: $y_{\max} f(x)$ и $y_{\min} f(x)$.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 1$ на отрезке $[-1;3]$.

Решение:

1. $y' = (x^3 - 9x^2 + 24x - 1)' = 3x^2 - 18x + 24$.
2. $3x^2 - 18x + 24 = 0$, $x^2 - 6x + 8 = 0$, $D = 4$, $x_{1,2} = \frac{6 \pm 2}{2} = 2; 4$.
3. Из найденных критических точек внутри отрезка $[-1;3]$ лежит только $x = 2$.
4. Найдём значения функции $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 1$ в точке $x=2$ и на концах отрезка $[-1;3]$:
 $y(-1) = -35$, $y(2) = 19$, $y(3) = 17$.
5. Очевидно, что $y_{\max}(2) = 19$, $y_{\min}(-1) = -35$.

2. Мгновенная скорость тела при прямолинейном движении

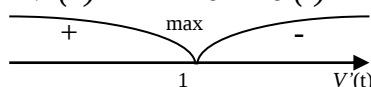
Пример 2. Закон прямолинейного движения тела задан уравнением $S = -t^3 + 3t^2 + 9t + 3$. Найдите максимальную (минимальную) скорость движения тела (S - в метрах, t - в секундах).

Решение: Скорость тела в данный момент времени – есть производная от пути по времени: $V = S'(t)$

$$V = (-t^3 + 3t^2 + 9t + 3)' = -3t^2 + 6t + 9 \text{ (м/с)}$$

Исследуем скорость V на экстремум:

- 1) $V' = -6t + 6$
- 2) $-6t + 6 = 0$, $t = 1$
- 3) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$
- 4) $V'(-2) = 12 + 6 = 18 (+)$
 $V'(2) = -12 + 6 = -6 (-)$



5) $V_{\max} = V(1) = -3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 9 = -3 + 6 + 9 = 12 \text{ (м/с)}$

t	$(-\infty; 1)$	1	$(1; +\infty)$
V'	+	0	-
V		Max 12	

Ответ: Скорость V движения тела будет максимальной на 1 секунде и равна 12 (м/с)

Задания для практического занятия:

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке.
2. Найти максимальную (минимальную) скорость движения тела.
3. Найти наилучшее решение задачи.

Вариант 1.

1. $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x - 4$, $[-4; 2]$

2. $S = t^3 - 3t^2 + 9t + 35$.

3. Разность двух чисел равна 98. Найти эти числа, если известно, что их произведение принимает наименьшее значение.

Вариант 2.

$$1. y = x^4 - 8x^3 + 10x^2 + 1, [-1; 2]$$

$$2. S = -t^3 + t^2 - 24t + 10.$$

3. Периметр прямоугольника составляет 56 см. Каковы его стороны, если этот прямоугольник имеет наибольшую площадь.

Вариант 3.

$$1. y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35, [0; 4]$$

$$2. S = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 2t - \frac{1}{3}.$$

3. Площадь прямоугольника составляет 16 см^2 . Каковы должны быть его размеры, чтобы периметр прямоугольника был наименьшим.

Вопросы и задания для закрепления:

1. Как найти наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке?
2. Что такое экстремумы функции?
3. Условия существования максимума и минимума функции.
4. Как найти максимальную (минимальную) скорость движения тела?

Список рекомендуемой литературы:

1. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник. – 3 –е изд., стереотип. – М: Издательский центр «Академия»; Мастерство, 2021. – 304 с.
2. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике: Учеб. пособие для сред. проф. образования. – 3 –е изд., перераб. М: издат. Центр «Академия», 2022
3. Башмаков М.И. Математика: учебник для учреждений начального и среднего профессионального образования.- М.: издательский центр «Академия», 2021
4. П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т.Л. Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах.- М.: Высшая школа, 2020,
5. Дадаян, А. А. Сборник задач по математике: учебное пособие / А. А. Дадаян. - 3-е изд. - Москва: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2021. - 352 с. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-91134-803-8. - Текст: электронный. <https://e.lanbook.com/book/2579123>

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Практическое занятие №7

Тема 1.3 Дифференциальное и интегральное исчисления.

Название практической работы: «Нахождение неопределенных интегралов различными методами».

Ведущая дидактическая цель: формирование практического умения вычисления интегралов с применением различных методов.

Формируемые ОК:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное

развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях.

Формируемые ПК (элементы ПК):

ПК 1.1. Планировать работу растениеводческих бригад (звеньев, работников) по выполнению полевых работ.

ПК 1.6 Формировать первичную отчетность по результатам выполнения работ, в том числе в электронном виде.

ПК 2.1. Планировать выполнение работ по получению, первичной обработке, хранению продукции животноводства в соответствии с технологическими картами, регламентами.

ПК 2.6. Формировать первичную отчетность по содержанию и разведению сельскохозяйственных животных, учёту продукции животноводства, в том числе в электронном виде.

Учебные материалы: карточки с заданиями практической работы, карточки с контрольными вопросами.

Содержание работы: записать теоретическую часть и решить задачи практической работы.

Характер выполнения работы: репродуктивный, поисковый

Форма организации занятия: фронтальная, индивидуально – групповая.

Теоретическая часть практического занятия:

Интегрирование – это действие, обратное дифференцированию. С помощью интегрирования по данной производной или дифференциалу функции находится сама функция. Например, если $F'(x) = 7x^6$, то $F(x) = x^7$, т.к. $(x^7)' = 7x^6$

Дифференцируемая функция $F(x)$, $x \in [a; b]$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на интервале $[a; b]$, если $F'(x) = f(x)$ для каждого $x \in [a; b]$.

Так, для функции $f(x) = 1/\cos^2 x$ первообразной служит функция $F(x) = \operatorname{tg} x$, поскольку $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$.

Совокупность всех первообразных функций $f(x)$ на интервале $[a; b]$, называют *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ на этом интервале и пишут $\int f(x)dx = F(x) + C$. Здесь $f'(x)dx$ - подынтегральное выражение; $f(x)$ - подынтегральная функция; x - переменная интегрирования; C - произвольная постоянная

Например, $\int 5x^4 dx = x^5 + C$, т.к. $(x^5 + C)' = 5x^4$.

Основные свойства неопределенного интеграла.

1. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d \int f(x)dx = f(x)dx$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции, сложенной с произвольной постоянной, т.е.

$$\int dF(x)dx = F(x) + C$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от каждой функции:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx.$$

Основные формулы интегрирования (табличные интегралы).

1. $\int dx = x + C.$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C (n \neq -1).$
3. $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
4. $\int e^x dx = e^x + C.$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arctg} x + C.$

Пример 1. Вычислить интеграл: $\int 4(x^2 - x + 3) dx$.

Решение. Используя свойства и формулы табличных интегралов: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $\int dx = x + C$ получим:

$$\begin{aligned} \int 4(x^2 - x + 3) dx &= \int (4x^2 - 4x + 12) dx = 4 \int x^2 dx - 4 \int x dx + 12 \int dx = 4 \frac{x^3}{3} - 4 \frac{x^2}{2} + 12x = \\ &= \frac{4}{3} x^3 - 2x^2 + 12x + C; \end{aligned}$$

Если интеграл трудно привести к табличному с помощью элементарных преобразований, то в этом случае пользуются методом подстановки.

Пример 2. Найти $\int \frac{x dx}{\sqrt{2-3x^2}}.$

Решение. Произведем постановку

$t = 2 - 3x^2$, тогда $dt = (2 - 3x^2)' \cdot dx = -6x dx$, откуда $x dx = -\frac{1}{6} dt$. Далее, получаем:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \int \frac{(-1/6) dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{6} \cdot \int t^{-1/2} dt = -\frac{1}{6} \cdot \frac{t^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C = -\frac{1}{6} \cdot \frac{t^{1/2}}{1/2} + C = -\frac{1}{3} \sqrt{t} + C = -\frac{1}{3} \sqrt{2-3x^2} + C.$$

Пример 3. Найти $\int (2 + \cos x)^2 \cdot \sin x dx$.

Решение. Сначала положим

$t = 2 + \cos x$, тогда $dt = (2 + \cos x)' \cdot dx = -\sin x dx$, откуда $\sin x dx = -dt$. Далее, получаем:

$$\begin{aligned} \int (2 + \cos x)^2 \sin x dx &= \int t^2 (-dt) = -\int t^2 dt = -\frac{t^{2+1}}{2+1} + C = \\ &= -\frac{1}{3} \cdot t^3 + C = -\frac{1}{3} (2 + \cos x)^3 + C. \end{aligned}$$

Пример 4. Вычислить интеграл: $\int (2x^3 + 1)^4 x^2 dx$.

Решение. Приведём данный интеграл к табличному виду. Воспользуемся подстановкой $2x^3 + 1 = u$. Дифференцируя, имеем $6x^2 dx = du$, откуда $x^2 dx = (1/6)du$. Подставив в данный интеграл эти выражения, получим:

$$\int (2x^3 + 1)^4 x^2 dx = \frac{1}{6} \int u^4 du = \frac{1}{6} \cdot \frac{u^5}{5} + C = \frac{u^5}{30} + C.$$

Заменяя u его выражением через x , находим:

$$\int (2x^3 + 1)^4 x^2 dx = \frac{u^5}{30} + C = \frac{1}{30} (2x^3 + 1)^5 + C.$$

Пример 5. Вычислить интеграл: $\int \frac{\arctg x}{1+x^2} dx$.

Решение. Используем также метод замены переменной: положим $\arctg x = t$, откуда:

$$\frac{1}{1+x^2} dx = dt.$$

Подставив эти выражения в данный интеграл, получим:

$$\int \frac{\arctg x}{1+x^2} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C$$

Заменяя t его выражением через x , находим:

$$\int \frac{\arctg x}{1+x^2} dx = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2} (\arctg x)^2 + C.$$

В практике интегрирования часто встречаются интегралы, для нахождения которых можно использовать следующие формулы ($k \neq 0, n \neq 0$ – постоянные):

1. $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$
2. $\int a^{kx} dx = \frac{1}{k \ln a} a^{kx} + C$
3. $\int \sin kx dx = -\frac{1}{k} \cos kx + C$
4. $\int \cos kx dx = \frac{1}{k} \sin kx + C$
5. $\int \frac{dx}{\cos^2 kx} = \frac{1}{k} \operatorname{tg} kx + C$
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 kx} = -\frac{1}{k} \operatorname{ctg} kx + C$
7. $\int \frac{dx}{k^2 + n^2 x^2} = \frac{1}{nk} \operatorname{arctg} \frac{n}{k} x + C$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - n^2 x^2}} = \frac{1}{n} \arcsin \frac{n}{k} x + C$

Так, при нахождении $\int \sin 10x dx$ можно использовать формулу

$$\int \sin kx dx = -(1/k) \cos kx + C, \text{ где } k = 10. \text{ Тогда}$$

$$\int \sin 10x dx = -(1/10) \cos 10x + C.$$

Задания для практического занятия:

1. Найти интеграл непосредственным интегрированием.
2. Найти интеграл методом замены переменной.

Вариант 1.

$$1. \int (4x^3 - 6x^2 + 2x + 1) dx; \quad 2. a) \int (2x^3 - 1)x^2 dx; \quad б) \int \frac{\sin x dx}{3 - \cos x}.$$

Вариант 2.

$$1. \int (6x^2 - 3x + \sqrt{x} - 2) dx; \quad 2. a) \int e^{\sin x} \cos x dx; \quad б) \int \frac{x dx}{\sqrt{3x^2 + 1}}.$$

Вариант 3.

$$1. a) \int (2x - 15x^2 + x^4 + 7) dx; \quad 2. a) \int (x^2 + 1)x dx; \quad б) \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{3 \sin x + 1}}.$$

Вопросы и задания для закрепления:

1. Что называют неопределённым интегралом?
2. Сформулируйте свойства неопределённого интеграла.
3. Запишите табличные интегралы.

Перечислите основные методы интегрирования **Список рекомендуемой литературы:**

1. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник. – 3 –е изд., стереотип. – М: Издательский центр «Академия»; Мастерство, 2021. – 304 с.
2. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике: Учеб. пособие для сред. проф. образования. – 3 –е изд., перераб. М: издат. Центр «Академия», 2022
3. Башмаков М.И. Математика: учебник для учреждений начального и среднего профессионального образования.- М.: издательский центр «Академия», 2021
4. П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т.Л. Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах.- М.: Высшая школа, 2020,
5. Дадаян, А. А. Сборник задач по математике: учебное пособие / А. А. Дадаян. - 3-е изд. - Москва: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2021. - 352 с. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-91134-803-8. - Текст: электронный. <https://e.lanbook.com/book/2579123>

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Практическое занятие № 8

Тема 1.3 Дифференциальное и интегральное исчисления.

Название практической работы: «Вычисление определенных интегралов».

Ведущая дидактическая цель: формирование практического умения вычисления определённых интегралов с применением различных методов.

Формируемые ОК:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях.

Формируемые ПК (элементы ПК):

ПК 1.1. Планировать работу растениеводческих бригад (звеньев, работников) по выполнению полевых работ.

ПК 1.6 Формировать первичную отчетность по результатам выполнения работ, в том числе в электронном виде.

ПК 2.1. Планировать выполнение работ по получению, первичной обработке, хранению продукции животноводства в соответствии с технологическими картами, регламентами.

ПК 2.6. Формировать первичную отчетность по содержанию и разведению сельскохозяйственных животных, учёту продукции животноводства, в том числе в электронном виде.

Учебные материалы: карточки с заданиями практической работы, карточки с контрольными вопросами.

Содержание работы: записать теоретическую часть и решить задачи практической работы.

Характер выполнения работы: репродуктивный, поисковый

Форма организации занятия: фронтальная, индивидуально – групповая.

Теоретическая часть практического занятия:

Интеграл, имеющий заданные пределы интегрирования, называют определённым. Непосредственное вычисление определенного интеграла производится по формуле *Ньютона – Лейбница*:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \text{ где } a - \text{нижний предел, } b - \text{верхний предел, } F(x) -$$

первообразная функции $f(x)$, $F(b)$ и $F(a)$ – значения первообразной на концах промежутка.

Из этой формулы виден порядок вычисления определенного интеграла:

- 1) найти одну из первообразных $F(x)$ данной функции;
- 2) вычислить значения $F(x)$ при $x=a$ и $x=b$;
- 3) найти разность $F(b) - F(a)$.

Пример 1. Вычислить интеграл: $\int_1^3 4(x^2 - x + 3)dx$.

Решение. Используя формулы табличных интегралов $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $\int dx = x + C$ и их свойства получим:

$$\begin{aligned} \int_1^3 4(x^2 - x + 3)dx &= \int_1^3 (4x^2 - 4x + 12)dx = 4\int_1^3 x^2 dx - 4\int_1^3 x dx + 12\int_1^3 dx = 4\frac{x^3}{3}\Big|_1^3 - 4\frac{x^2}{2}\Big|_1^3 + 12x\Big|_1^3 = \\ &= \frac{4}{3}x^3\Big|_1^3 - 2x^2\Big|_1^3 + 12x\Big|_1^3 = \frac{4}{3}(3^3 - 1^3) - 2(3^2 - 1^2) + 12(3 - 1) = \frac{4}{3} \cdot 26 - 2 \cdot 8 + 12 \cdot 2 = \frac{128}{3}; \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение. Воспользуемся свойствами степени с дробным отрицательным показателем

$\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = x^{-m/n}$ и вычислим определенный интеграл по формуле $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$:

$$\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_1^8 x^{-2/3} dx = \left. \frac{x^{1/3}}{1/3} \right|_1^8 = 3\sqrt[3]{x} \Big|_1^8 = 3(\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{1}) = 3(2 - 1) = 3.$$

Основные свойства определенного интеграла

1. При перестановке пределов интегрирования знак интеграла меняется на противоположный:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

2. Отрезок интегрирования можно разбивать на части:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$$

4. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от всех слагаемых:

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_1^2 \frac{x^2 dx}{(x^3 + 2)^2}$.

Решение.

1). Подынтегральная функция является сложной степенной, непосредственное вычисление по формуле Ньютона-Лейбница невозможно, применим интегрирование методом замены переменной. Произведем подстановку $(x^3 + 2) = t$, тогда $3x^2 dx = dt$, $x^2 dx = 1/3 dt$.

2). Определим пределы интегрирования для переменной t . При $x = 1$, получаем $t_n = 1^3 + 2 = 3$, при $x = 2$, находим $t_a = 2^3 + 2 = 10$.

3) Выразим подынтегральное выражение через t и dt и перейдем к новым пределам интегрирования, в результате получим:

$$\int_1^2 \frac{x^2 dx}{(x^3 + 2)^2} = \int_3^{10} \frac{1/3 dt}{t^2} = \frac{1}{3} \int_3^{10} t^{-2} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{-1}}{-1} \Big|_3^{10} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t} \Big|_3^{10} = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{7}{30} \right) = \frac{7}{90}.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x} \sin x dx$.

Решение. 1). Положим $\cos x = t$, тогда $-\sin x dx = dt$ и $\sin x dx = -dt$.

2). Определим новые пределы интегрирования:

$$t_n = \cos 0 = 1, \quad t_a = \cos(\pi/2) = 0.$$

3). Выразим подынтегральное выражение через t и dt и, применяя свойства определённого интеграла, получим:

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x} \sin x dx = - \int_1^0 \sqrt{t} dt = \int_0^1 t^{1/2} dt = \left. \frac{t^{3/2}}{3/2} \right|_0^1 = \frac{2}{3} \sqrt{t^3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} t \sqrt{t} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} (1 - 0) = \frac{2}{3}.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$.

Решение. Сначала преобразуем подынтегральное выражение $\sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x = (1 - \cos^2 x) \sin x = \sin x - \cos^2 x \sin x$

Затем вычислим интеграл от разности функций, заменив его разностью определенных интегралов от каждой функции:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx = \int_0^{\pi/2} \sin x dx - \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x dx.$$

Вычислим каждый интеграл отдельно:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = -(\cos(\pi/2) - \cos 0) = -(0 - 1) = 1;$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x dx = -\int_0^1 t^2 dt = -\frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = -\frac{1}{3}(1 - 0) = -\frac{1}{3}.$$

Пусть $\cos x = t$, тогда $-\sin x dx = dt$, откуда $\sin x dx = -dt$, $t_1 = \cos 0 = 1$, $t_2 = \cos(\pi/2) = 0$.

Тогда, $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$

Задания для практического занятия:

1. Вычислить интеграл по формуле Ньютона - Лейбница.
2. Найти интеграл методом замены переменной.

Вариант 1.

1. $\int_1^3 (4x^3 - 6x^2 + 2x + 1) dx;$ 2. а) $\int_0^2 (2x^3 - 1)x^2 dx;$ б) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{3 - \cos x}.$

Вариант 2.

1. $\int_1^4 (6x^2 - 3x + \sqrt{x} - 2) dx;$ 2. а) $\int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \cos x dx;$ б) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{3x^2 + 1}}.$

Вариант 3.

1. $\int_1^2 (2x - 15x^2 + x^4 + 7) dx;$ 2. а) $\int_2^3 (x^2 + 1)x dx;$ б) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sqrt{3 \sin x + 1}}.$

Вопросы и задания для закрепления:

1. Что называют определённым интегралом?
2. Сформулируйте свойства определённого интеграла.
3. Запишите формулу Ньютона - Лейбница.
4. Перечислите основные методы интегрирования.

Список рекомендуемой литературы:

1. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник. – 3 –е изд., стереотип. – М: Издательский центр «Академия»; Мастерство, 2021. – 304 с.
2. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике: Учеб. пособие для сред. проф. образования. – 3 –е изд., перераб. М: издат. Центр «Академия», 2022
3. Башмаков М.И. Математика: учебник для учреждений начального и среднего профессионального образования.- М.: издательский центр «Академия», 2021
4. П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т.Л. Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах.- М.: Высшая школа, 2020,
5. Дадаян, А. А. Сборник задач по математике: учебное пособие / А. А. Дадаян. - 3-е изд. - Москва: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2021. - 352 с. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-91134-803-8. - Текст: электронный. <https://e.lanbook.com/book/2579123>

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Практическое занятие № 9

Тема 1.3 Дифференциальное и интегральное исчисления.

Название практической работы: «Применение определенного интеграла в практических задачах».

Ведущая дидактическая цель: формирование практического умения применять навык вычисления определённых интегралов для нахождения площади криволинейной трапеции и решения прикладных задач.

Формируемые ОК:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях.

Формируемые ПК (элементы ПК):

ПК 1.1. Планировать работу растениеводческих бригад (звеньев, работников) по выполнению полевых работ.

ПК 1.6 Формировать первичную отчетность по результатам выполнения работ, в том числе в электронном виде.

ПК 2.1. Планировать выполнение работ по получению, первичной обработке, хранению продукции животноводства в соответствии с технологическими картами, регламентами.

ПК 2.6. Формировать первичную отчетность по содержанию и разведению сельскохозяйственных животных, учёту продукции животноводства, в том числе в электронном виде.

Учебные материалы: карточки с заданиями практической работы, карточки с контрольными вопросами.

Содержание работы: записать теоретическую часть и решить задачи практической работы.

Характер выполнения работы: репродуктивный, поисковый

Форма организации занятия: фронтальная, индивидуально – групповая.

Теоретическая часть практического занятия:

1. Путь, пройденный точкой. Если точка движется прямолинейно и её скорость $v = f(t)$ есть известная функция времени t , то путь, пройденный точкой за промежуток времени $[t_1; t_2]$, вычисляется по формуле:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \quad (1)$$

Пример 1. Тело движется прямолинейно со скоростью $v = 0,1t^3$ м/с. Вычислить путь, пройденный телом за первые 10с.

Решение. Применяя формулу (1), находим искомый путь:

$$s = \int_0^{10} 0,1t^3 dt = \frac{1}{10} \cdot \frac{t^4}{4} \Big|_0^{10} = \frac{1}{40} \cdot 10^4 = 250(м)$$

2. Работа силы. Если переменная сила $F = F(x)$ действует в направлении оси Ox , то работа силы на отрезке $[a, b]$ вычисляется по формуле:

$$A = \int_a^b F(x) dx \quad (2)$$

Пример 2.1 Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть пружину на 0,06м, если сила 1 Н растягивает ее на 0,01м?

Решение. Согласно закону Гука сила F , растягивающая или сжимающая пружину на x м, равна $F = kx$, где k - коэффициент пропорциональности. Из условия следует, $1 = k \cdot 0,01$, т.е. $k = 100$, и, следовательно $F = 100x$. Искомую работу находим по формуле (2):

$$A = \int_0^{0,06} 100x dx = 100 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,06} = 50 \cdot 0,0036 = 0,18(Дж);$$

Пример 2.2. Сила 196,2 Н растягивает пружину на 18 см. Какую работу она производит?

Решение. По закону Гука $F = kx$, откуда $k = F / x = 196,2 / 0,18 = 1090 (Н / м)$.

Значит, $F = 1090x$. Находим искомую работу по формуле (2):

$$A = \int_0^{0,18} 1090x dx = 1090 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,18} \approx 545 \cdot 0,18^2 \approx 17,7(Дж).$$

3. Площадь плоской фигуры. Площадь криволинейной трапеции $aABb$ (рис.1), ограниченной графиком непрерывной функции $y = f(x)$, осью Ox , отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b f(x) dx \quad (3)$$

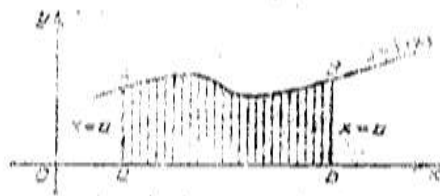


Рис.1.

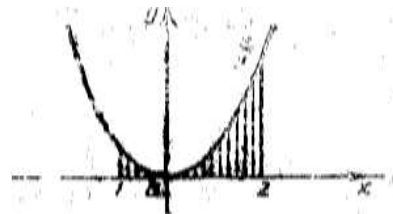


Рис.2.

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, прямыми $x = -1$, $x = 2$ и осью абсцисс (рис.2).

Решение. Применяя формулу (3), получаем

$$S = \int_{-1}^2 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-1}^2 = \frac{1}{3} (8 - (-1)) = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3, \text{ т.е. } S = 3 \text{ кв.ед.}$$

4. Объём тела вращения. Объём тела, образованного в результате вращения вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y = f(x)$, осью Ox , отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx \quad (4)$$

Аналогично, объём тела, образованного вращением вокруг оси Оу криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $x = \varphi(y)$, осью Оу, отрезками прямых $y = c$ и $y = d$, вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy \quad (5)$$

Пример 4. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Ох площадей, ограниченных линиями: параболой $y^2 = 4x$, прямыми $y = 0$, $x = 4$.

Решение. Применяя формулу (4), получаем

$$V = \pi \int_0^4 4x dx = 2\pi x^2 \Big|_0^4 = 2\pi(4^2 - 0^2) = 32\pi (\text{ед}^3).$$

Задания для практического занятия:

1. Найти путь тела, движущегося с заданной скоростью за данный промежуток времени.
2. Вычислить работу, совершаемую при сжатии или растяжении пружины, пропорционально приложенной силе.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями.
4. Найти объём тела, образованного вращением фигуры вокруг оси Ох, ограниченной заданными линиями

Вариант 1.

1. $V = 3t^2 + 4t - 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 4$.
2. $x_1 = 0,02$ м, $A_1 = 30$ Дж, $x_2 = 0,03$ м, $A_2 = ?$
3. $x - y + 2 = 0$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$.
4. $y^2 = x$, $y = x^2$.

Вариант 2.

1. $V = t^2 - 8t + 2$, $t_1 = 0$, $t_2 = 3$.
2. $x_1 = 0,01$ м, $F_1 = 10$ Н, $x_2 = 0,08$ м, $A_2 = ?$
3. $y = x^2 - 8x + 18$, $y = -2x + 18$.
4. $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi$.

Вариант 3.

1. $V = 2t - 3$, $t_1 = 0$, $t_2 = 5$.
2. $x_1 = 0,03$ м, $F_1 = 15$ Н, $x_2 = 0,06$ м, $A_2 = ?$
3. $x - y + 3 = 0$, $x + y - 1 = 0$, $y = 0$.
4. $y^2 = 8x$, $y = x^2$.

Вопросы и задания для закрепления:

1. Как найти путь тела, движущегося с заданной скоростью за данный промежуток времени?
2. Запишите формулу работы, совершаемой при сжатии или растяжении пружины, пропорционально приложенной силе.
3. Сформулируйте правила вычисления площади фигуры, ограниченной заданными линиями?
4. Запишите формулы объёма тела, образованного вращением фигуры вокруг оси Ох и Оу, ограниченной заданными линиями.

Список рекомендуемой литературы:

1. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник. – 3 –е изд., стереотип. – М: Издательский центр «Академия»; Мастерство, 2021. – 304 с.
2. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике: Учеб. пособие для сред. проф. образования. – 3 –е изд., перераб. М: издат. Центр «Академия», 2022

3. Башмаков М.И. Математика: учебник для учреждений начального и среднего профессионального образования.- М.: издательский центр «Академия», 2021
4. П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т.Л. Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах.- М.: Высшая школа, 2020,
5. Дадаян, А. А. Сборник задач по математике: учебное пособие / А. А. Дадаян. - 3-е изд. - Москва: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2021. - 352 с. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-91134-803-8. - Текст: электронный. <https://e.lanbook.com/book/2579123>

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Практическое занятие № 10

Тема 2.1 Матрицы и определители.

Название практической работы: «Действия с матрицами».

Ведущая дидактическая цель: формирование практического умения выполнять действия с матрицами.

Формируемые ОК:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях.

Формируемые ПК (элементы ПК):

ПК 1.1. Планировать работу растениеводческих бригад (звеньев, работников) по выполнению полевых работ.

ПК 1.6 Формировать первичную отчетность по результатам выполнения работ, в том числе в электронном виде.

ПК 2.1. Планировать выполнение работ по получению, первичной обработке, хранению продукции животноводства в соответствии с технологическими картами, регламентами.

ПК 2.6. Формировать первичную отчетность по содержанию и разведению сельскохозяйственных животных, учёту продукции животноводства, в том числе в

электронном виде.

Учебные материалы: карточки с заданиями практической работы, карточки с контрольными вопросами.

Содержание работы: записать теоретическую часть и решить задачи практической работы.

Характер выполнения работы: репродуктивный, поисковый

Форма организации занятия: фронтальная, индивидуально – групповая.

Теоретическая часть практического занятия:

Матрицей называется квадратная или прямоугольная таблица, заполненная числами. Эти числа называются элементами матрицы.

Элементы матрицы, расположенные по горизонталям, образуют строки матрицы. Элементы матрицы, расположенные по вертикалям, образуют столбцы матрицы.

Строки нумеруются слева направо, начиная с номера 1, столбцы нумеруются сверху вниз, начиная с номера 1.

Матрица A , имеющая m строк и n столбцов, называется матрицей размера m на n и обозначается $A_{m \times n}$. Элемент a_{ij} матрицы $A = \{a_{ij}\}$ стоит на пересечении i -ой строки и j -го столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \left\| \begin{array}{ccccc} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|$$

Главной диагональю квадратной матрицы называется диагональ, ведущая из левого верхнего угла матрицы в правый нижний угол. Побочной диагональю квадратной матрицы называется диагональ, ведущая из левого нижнего угла матрицы в правый верхний угол.

Две матрицы считаются равными, если они имеют одинаковую размерность и их соответствующие элементы равны.

Каждую матрицу можно умножить на любое число, причем, если k – число, то $k \cdot A = \{k \cdot a_{ij}\}$.

Матрицы одного и того же размера $A_{m \times n}$ и $B_{m \times n}$ можно складывать, причем $A_{m \times n} + B_{m \times n} = \{a_{ij} + b_{ij}\}$.

Операция сложения матриц обладает свойствами $A + B = B + A$, $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Матрицы $A_{m \times n}$ и $B_{n \times k}$ можно перемножать, причем $A_{m \times n} \cdot B_{n \times k} = C_{m \times k}$, где $c_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is} \cdot b_{sj}$.

Операция умножения матриц обладает свойствами $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

В общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Пример 1. Выполнив действия над матрицами, найдите матрицу $C = 2A - B$, где $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Вычислим матрицу $2A$ размерности 3×3 :

$$2A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 \\ -4 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Вычислим матрицу $C = 2A - B$ размерности 3×3 :

$$C = 2A - B = \begin{pmatrix} 9 & 6 & -4 \\ -7 & 0 & 9 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Определителем матрицы третьего порядка называется число, определяемое равенством:

$$\Delta_3 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}.$$

Это число представляет алгебраическую сумму, состоящую из шести слагаемых. В каждое слагаемое входит ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы. Каждое слагаемое состоит из произведения трех сомножителей.

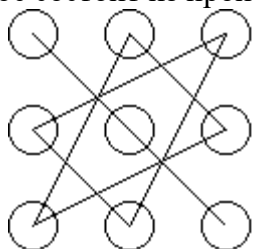


Рис.1.1.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

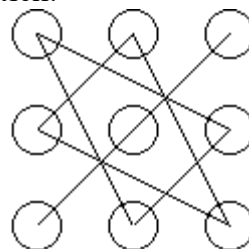


Рис.1.2.

Знаки, с которыми члены определителя входят в формулу нахождения определителя третьего порядка можно определить, пользуясь приведенной схемой, которая называется правилом треугольников или правилом Сарруса. Первые три слагаемые берутся со знаком плюс и определяются из рисунка (1.1.), а последующие три слагаемые берутся со знаком минус и определяются из рисунка (1.2).

Пример 2. Вычислить определитель третьего порядка по правилу Сарруса:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Решение:

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 4 \cdot 9 - 1 \cdot 6 \cdot 8 = \\ &= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 225 - 225 = 0 \end{aligned}$$

Пример 3. Вычислить определитель третьего порядка методом разложения по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & -8 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

Решение:

Используем формулу:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & -8 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -5 & -8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -8 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3(-5 + 16) - 2(1 + 32) + 2(2 + 20) = 33 - 66 + 44 = 11.$$

Рассмотрим основные свойства определителей:

- Определитель с нулевой строкой (столбцом) равен нулю.
- Если у матрицы умножить любую строку (любой столбец) на какое-либо число, то определитель матрицы умножится на это число.
- Определитель не меняется при транспонировании матрицы.
- Определитель меняет знак при перестановке любых двух строк (столбцов) матрицы.
- Определитель матрицы с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.
- Определитель не меняется, если к какой-нибудь строке прибавить любую другую строку, умноженную на любое число. Аналогичное утверждение справедливо и для столбцов.

Задания для практического занятия:

1. Найти матрицу преобразования.
2. Найдите значение определителя по правилу треугольников (правило Сарруса).
3. Разложите определитель по элементам первой строки и вычислите его.
4. Используя свойства определителя, докажите равенство.

Вариант 1.

1. $C = A + 3B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} x & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5x & -2 \end{vmatrix}$;

3. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$; 4. $\begin{vmatrix} 11 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 11 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$;

Вариант 2.

1. $C = 2A - B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ -3 & 3 & x \end{vmatrix}$;

3. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; 4. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -7 \\ 2 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0$;

Вариант 3.

1. $C = 3A + B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ 2 & 3x & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$;

3. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}$; 4. $\begin{vmatrix} 3 & 21 & 1 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 21 & 1 \end{vmatrix} = 0$;

Вопросы и задания для закрепления:

1. Что называют матрицей?
2. Какие действия производятся над матрицами?
3. Укажите основные свойства матриц.
4. Назовите основные свойства определителей.

Список рекомендуемой литературы:

1. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник. – 3 –е изд., стереотип. – М: Издательский центр «Академия»; Мастерство, 2021. – 304 с.
2. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике: Учеб. пособие для сред. проф. образования. – 3 –е изд., перераб. М: издат. Центр «Академия», 2022
3. Башмаков М.И. Математика: учебник для учреждений начального и среднего профессионального образования.- М.: издательский центр «Академия», 2021
4. П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т.Л. Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах.- М.: Высшая школа, 2020,
5. Дадаян, А. А. Сборник задач по математике: учебное пособие / А. А. Дадаян. - 3-е изд. - Москва: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2021. - 352 с. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-91134-803-8. - Текст: электронный. <https://e.lanbook.com/book/2579123>

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Практическое занятие № 11

Тема 2.1 Матрицы и определители.

Название практической работы: «Нахождение обратной матрицы»

Ведущая дидактическая цель: формирование практического умения вычислять определители матриц второго и третьего порядка, находить обратные матрицы.

Формируемые ОК:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях.

Формируемые ПК (элементы ПК):

ПК 1.1. Планировать работу растениеводческих бригад (звеньев, работников) по выполнению полевых работ.

ПК 1.6 Формировать первичную отчетность по результатам выполнения работ, в том числе в электронном виде.

ПК 2.1. Планировать выполнение работ по получению, первичной обработке, хранению продукции животноводства в соответствии с технологическими картами, регламентами.

ПК 2.6. Формировать первичную отчетность по содержанию и разведению сельскохозяйственных животных, учёту продукции животноводства, в том числе в электронном виде.

Учебные материалы: карточки с заданиями практической работы, карточки с контрольными вопросами.

Содержание работы: записать теоретическую часть и решить задачи практической работы.

Характер выполнения работы: репродуктивный, поисковый

Форма организации занятия: фронтальная, индивидуально – групповая.

Теоретическая часть практического занятия:

Определителем (или детерминантом) второго порядка, соответствующим данной матрице, называется число $a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.

Определитель обозначают символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

По определению, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ называются элементами определителя.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \text{квадратная матрица размера } 3 \times 3$$

Соответствующим ей **определителем третьего порядка** называется число, которое вычисляется следующим образом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Квадратная матрица A называется **вырожденной**, если ее *определитель равен нулю*, и **невырожденной**, если ее *определитель не равен нулю*.

Если A - квадратная матрица, то **обратной** по отношению к A называется матрица, которая **будучи умноженной, на A (как справа так и слева),** дает единичную матрицу. Обозначается A^{-1} .

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

Если обратная матрица A^{-1} существует, то матрица A называется обратимой.

Операция вычисления обратной матрицы при условии, что она существует, называется обращением матрицы.

Теорема: для того чтобы квадратная матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы матрица была невырожденной, то есть, чтобы ее определитель был отличен от нуля.

При условии $D = |A| \neq 0$ обратная матрица находится по формуле

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \dots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \dots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \dots & \frac{A_{nn}}{D} \end{vmatrix}$$

Для нахождения обратной матрицы используют следующую схему:

1. Находят определитель матрицы A ;
2. Находят алгебраические дополнения A_{ij} всех элементов матрицы A и записывают новую матрицу;
3. Меняют местами столбцы полученной матрицы (транспонируют матрицу);
4. Умножают полученную матрицу на $\frac{1}{D}$

Задания для практического занятия:

1. Найти матрицы, обратные к данным.
2. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы.

Вариант 1.

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}; \quad 2. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$$

Вариант 2.

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -8 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 7 & 5 & -6 \\ 1 & -8 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad 2. \begin{cases} 4x_1 - x_2 - 5x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 3x_1 - 2x_2 - 6x_3 = -2. \end{cases}$$

Вариант 3.

$$1. A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 6 & -4 & 7 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}; \quad 2. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -3, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Вопросы и задания для закрепления:

1. Какую матрицу называют обратной к данной?
2. Условие существования обратной матрицы?
3. Укажите основные свойства обратной матрицы.

Список рекомендуемой литературы:

1. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник. – 3 –е изд., стереотип. – М: Издательский центр «Академия»; Мастерство, 2021. – 304 с.
2. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике: Учеб. пособие для сред. проф. образования. – 3 –е изд., перераб. М: издат. Центр «Академия», 2022
3. Башмаков М.И. Математика: учебник для учреждений начального и среднего профессионального образования.- М.: издательский центр «Академия», 2021
4. П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т.Л. Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах.- М.: Высшая школа, 2020,
5. Дадаян, А. А. Сборник задач по математике: учебное пособие / А. А. Дадаян. - 3-е изд. - Москва: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2021. - 352 с. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-91134-803-8. - Текст: электронный. <https://e.lanbook.com/book/2579123>

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Практическое занятие № 12

Тема 2.2 Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Название практической работы: «Решение СЛАУ различными методами».

Ведущая дидактическая цель: формирование навыков решения системы 3 линейных уравнений с тремя переменными методами Крамера и Гаусса.

Формируемые ОК:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и

информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях.

Формируемые ПК (элементы ПК):

ПК 1.1. Планировать работу растениеводческих бригад (звеньев, работников) по выполнению полевых работ.

ПК 1.6 Формировать первичную отчетность по результатам выполнения работ, в том числе в электронном виде.

ПК 2.1. Планировать выполнение работ по получению, первичной обработке, хранению продукции животноводства в соответствии с технологическими картами, регламентами.

ПК 2.6. Формировать первичную отчетность по содержанию и разведению сельскохозяйственных животных, учёту продукции животноводства, в том числе в электронном виде.

Учебные материалы: карточки с заданиями практической работы, карточки с контрольными вопросами.

Содержание работы: записать теоретическую часть и решить задачи практической работы.

Характер выполнения работы: репродуктивный, поисковый

Форма организации занятия: фронтальная, индивидуально – групповая.

Теоретическая часть практического занятия:

Свойства матриц и определителей широко применяют при решении системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

где x_1, x_2, x_3 – переменные, $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ – числовые коэффициенты. Следует помнить, что при решении системы возможен один из трёх вариантов ответа:

- 1) система имеет единственное решение – $(x_1; x_2; x_3)$;
- 2) система имеет бесконечно много решений (не определена);
- 3) система не имеет решений (несовместна).

Рассмотрим основные методы решения системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными.

а). Метод Крамера позволяет найти единственное решение системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными, опираясь на умение вычислять определители третьего порядка,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$
$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Пример 1. Найти решение системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 30 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 150 \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 = 110 \end{cases}$$

Решение. Находим определители третьего порядка, используя правило Сарруса или разложение по элементам первой строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 10 & 9 \end{vmatrix} = 5, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 30 & 5 & 4 \\ 150 & 3 & 2 \\ 110 & 10 & 9 \end{vmatrix} = -760, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 30 & 4 \\ 1 & 150 & 2 \\ 2 & 110 & 9 \end{vmatrix} = 1350, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 30 \\ 1 & 3 & 150 \\ 2 & 10 & 110 \end{vmatrix} = -1270.$$

Находим решение системы по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$x_1 = -\frac{760}{5} = -152, \quad x_2 = \frac{1350}{5} = 270, \quad x_3 = -\frac{1270}{5} = -254$$

Ответ: (-152; 270; -254)

б). Метод Гаусса - классический метод решения системы линейных алгебраических уравнений. Это метод последовательного исключения переменных, когда с помощью элементарных преобразований (сложение, вычитание уравнений, умножение на коэффициенты) система уравнений приводится к равносильной системе треугольного вида, из которого последовательно, начиная с последних по номеру переменных, находятся все остальные переменные.

Пример 2.

Покажем, как методом Гаусса можно решить следующую систему:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 13, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

Во – первых, обнулим коэффициенты при x_1 во втором и третьем уравнениях. Для этого вычтем почленно из второго уравнения системы первое уравнение, умноженное на 2, и из третьего уравнения – первое, умноженное на 3. Имеем:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ -3x_2 + x_3 = 1, \\ -6x_2 - 2x_3 = -10. \end{cases}$$

Во – вторых, обнулим коэффициент при x_2 в третьем уравнении. Для этого вычтем из третьего уравнения второе, умноженное на 2. Получим легко решаемую систему треугольного вида:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ -3x_2 + x_3 = 1, \\ -4x_3 = -12. \end{cases}$$

В самом деле, из третьего уравнения находим значение $x_3 = 3$, подставляем его во второе уравнение и находим значение $x_2 = \frac{2}{3}$. Решаем первое уравнение и находим $x_1 = 1$.

Таким образом, исходная система решена.

Ответ: (1; $\frac{2}{3}$; 3).

Задания для практического занятия:

1. Решить систему методом Крамера
2. Решить систему методом Гаусса.

Вариант 1.

$$1. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

Вариант 2.

$$1. \begin{cases} 4x_1 - x_2 - 5x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 3x_1 - 2x_2 - 6x_3 = -2. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

Вариант 3.

$$1. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -3, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Вопросы и задания для закрепления:

1. Назовите основные методы решения систем линейных уравнений.
2. Опишите метод Крамера для решения систем трех линейных уравнений с 3 переменными.
3. Суть метода Гаусса для решения систем трех линейных уравнений с 3 переменными.

Список рекомендуемой литературы:

1. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник. – 3 –е изд., стереотип. – М: Издательский центр «Академия»; Мастерство, 2021. – 304 с.
2. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике: Учеб. пособие для сред. проф. образования. – 3 –е изд., перераб. М: издат. Центр «Академия», 2022
3. Башмаков М.И. Математика: учебник для учреждений начального и среднего профессионального образования.- М.: издательский центр «Академия», 2021
4. П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т.Л. Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах.- М.: Высшая школа, 2020,
5. Дадаян, А. А. Сборник задач по математике: учебное пособие / А. А. Дадаян. - 3-е изд. - Москва: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2021. - 352 с. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-91134-803-8. - Текст: электронный. <https://e.lanbook.com/book/2579123>

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Практическое занятие № 13

Тема 3.1 Множества и отношения.

Название практической работы: «Выполнение операций над множествами».

Ведущая дидактическая цель: формирование навыков выполнения операций над множествами.

Формируемые ОК:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях.

Формируемые ПК (элементы ПК):

ПК 1.1. Планировать работу растениеводческих бригад (звеньев, работников) по выполнению полевых работ.

ПК 1.6 Формировать первичную отчетность по результатам выполнения работ, в том числе в электронном виде.

ПК 2.1. Планировать выполнение работ по получению, первичной обработке, хранению продукции животноводства в соответствии с технологическими картами, регламентами.

ПК 2.6. Формировать первичную отчетность по содержанию и разведению сельскохозяйственных животных, учёту продукции животноводства, в том числе в электронном виде.

Учебные материалы: карточки с заданиями практической работы, карточки с контрольными вопросами.

Содержание работы: записать теоретическую часть и решить задачи практической работы.

Характер выполнения работы: репродуктивный, поисковый

Форма организации занятия: фронтальная, индивидуально – групповая.

Теоретическая часть практического занятия:

На конкретных примерах покажем выполнение операций над множествами, графическое изображение множеств с помощью диаграмм Эйлера.

Пример 1. Найдите:

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B, \quad B \setminus A, \text{ если } A = \{1; 3; 5; 6\}, \quad B = \{1; 3\}.$$

Решение:

Находим:

$$A \cup B = \{1; 3; 5; 6\} \cup \{1; 3\} = \{1; 3; 5; 6\}$$

$$A \cap B = \{1; 3; 5; 6\} \cap \{1; 3\} = \{1; 3\}$$

$$A \setminus B = \{1; 3; 5; 6\} \setminus \{1; 3\} = \{5; 6\}$$

$$B \setminus A = \{\emptyset\}.$$

Пример 2. Найти декартово произведение множеств $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{3, 5\}$.

Решение:

Декартовым произведением множеств A и B называется множество всех пар, образованных из элементов обоих множеств, первая компонента которых принадлежит множеству A , а вторая компонента принадлежит множеству B .

$$A \times B = \{(1; 3), (1; 5), (2; 3), (2; 5), (3; 3), (3; 5)\}$$

A*B	3	5
------------	----------	----------

1	(1;3)	(1,5)
2	(2,3)	(2,5)
3	(3,3)	(3,5)

Задания для практического занятия:

1. Изобразите на диаграммах Эйлера – Венна отношения заданных множеств.
2. Выполните операции $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$.
3. Найдите декартово произведение множеств $A \times B$.

Вариант 1.

1. $A \subset B, B \subset C$.
2. $A = \{ 3; 4; 5; 7 \}, B = \{ 3; 5; 6 \}$.
3. $A = \{ 2; 3; 5; 6 \}, B = \{ 1; 2; 3 \}$.

Вариант 2.

1. $A \subset C, B \subset C, A \setminus B = \emptyset$.
2. $A = \{ 0; 1; 7; 8 \}, B = \{ -7; 0; 6; 9 \}$.
3. $A = \{ 1; 5; 7; 9 \}, B = \{ 4; 5; 7 \}$.

Вариант 3.

1. $A \subset C, B \subset C, C = A \cup B$.
2. $A = \{ 1; 3; 5; 7 \}, B = \{ 2; 4; 6; 8 \}$.
3. $A = \{ 2; 4; 6; 9 \}, B = \{ 5; 7; 8 \}$.

Вопросы и задания для закрепления:

1. Перечислите основные операции над множествами.
2. Что изображают диаграммой Эйлера – Венна?
3. Дайте определение декартову произведению множеств.

Список рекомендуемой литературы:

1. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник. – 3 –е изд., стереотип. – М: Издательский центр «Академия»; Мастерство, 2021. – 304 с.
2. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике: Учеб. пособие для сред. проф. образования. – 3 –е изд., перераб. М: издат. Центр «Академия», 2022
3. Башмаков М.И. Математика: учебник для учреждений начального и среднего профессионального образования.- М.: издательский центр «Академия», 2021
4. П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т.Л. Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах.- М.: Высшая школа, 2020,
5. Дадаян, А. А. Сборник задач по математике: учебное пособие / А. А. Дадаян. - 3-е изд. - Москва: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2021. - 352 с. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-91134-803-8. - Текст: электронный. <https://e.lanbook.com/book/2579123>

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Практическое занятие № 14

Тема 3.2 Основные понятия теории графов.

Название практической работы: «Составление графов».

Формируемые ОК:

Ведущая дидактическая цель: формирование навыков выполнения операций над графами.

Формируемые ОК:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях.

Формируемые ПК (элементы ПК):

ПК 1.1. Планировать работу растениеводческих бригад (звеньев, работников) по выполнению полевых работ.

ПК 1.6 Формировать первичную отчетность по результатам выполнения работ, в том числе в электронном виде.

ПК 2.1. Планировать выполнение работ по получению, первичной обработке, хранению продукции животноводства в соответствии с технологическими картами, регламентами.

ПК 2.6. Формировать первичную отчетность по содержанию и разведению сельскохозяйственных животных, учёту продукции животноводства, в том числе в электронном виде.

Учебные материалы: карточки с заданиями практической работы, карточки с контрольными вопросами.

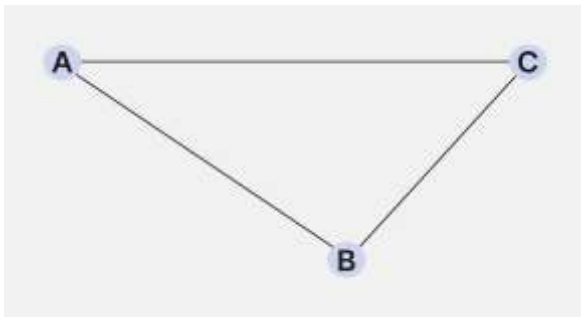
Содержание работы: записать теоретическую часть и решить задачи практической работы.

Характер выполнения работы: репродуктивный, поисковый

Форма организации занятия: фронтальная, индивидуально – групповая.

Теоретическая часть практического занятия:

Граф — это математическая структура, которая используется для моделирования связей между различными объектами. Граф состоит из вершин и рёбер, которые их соединяют. Проще всего понять природу графов на примере. Представьте, что у нас есть три города с незамысловатыми названиями А, В, С, которые соединены дорогами АВ, АС и ВС. На рисунке это можно изобразить так:



Так можно изобразить связь между тремя городами

Рисунок, который у нас получился, и есть граф. Он состоит из следующих элементов:

- **Вершины.** Ключевые точки или объекты в графе. Это могут быть, например, города на карте, веб-страницы в интернете или отделы в компании.
- **Рёбра.** Линии, которые соединяют вершины. Например, дорога между двумя городами, гиперссылка между веб-страницами или взаимодействие между отделами в компании.

С помощью графов хорошо получается изображать сложные связи, для которых не подходят другие способы визуализации. Например, с помощью графа можно показать карту социальных связей человека, в которой вершинами будут люди, а рёбрами — взаимоотношения.

Основные понятия теории графов

В графах рёбра и вершины могут иметь разные виды связей друг с другом. Это позволяет строить гибкие связи между объектами и отражать больше полезной информации на рисунке.

Ребро, соединяющее одну вершину с другой, называется **инцидентным** этим вершинам.

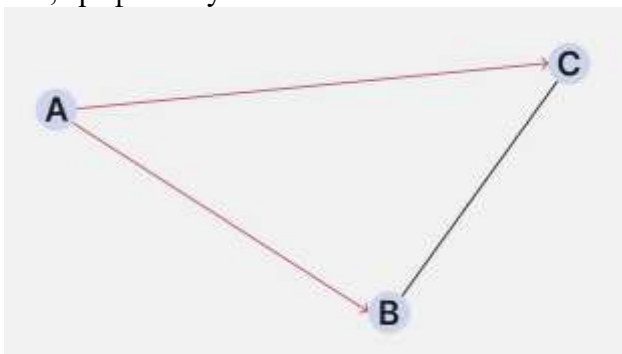
Например, ребро АВ соединяет вершины А и В. Оно будет инцидентно как вершине А, так и вершине В. Отношение инцидентности существует только между вершиной и ребром, два ребра или две вершины не могут быть инцидентными.

Рёбра могут быть **направленными** и **ненаправленными**. Если вершины А и В соединяет ребро и из А можно попасть в В и обратно, то ребро будет ненаправленным. Например, дорога, соединяющая города А и В, по которой можно попасть как из А в В, так и из В в А, — это ненаправленное ребро между вершинами графа А и В.

Если же из А можно попасть в В, но из В в А нельзя, то ребро будет направленным из А в В.

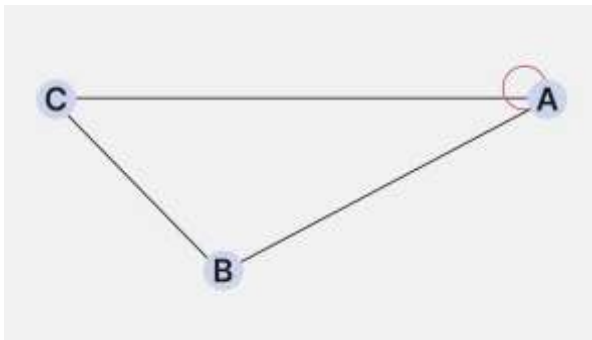
Ненаправленные рёбра могут показывать не только дороги между городами, но и подписки в социальных сетях. Например, если пользователь подписался на друга, но тот не ответил взаимностью, то такую связь называют ненаправленной.

Если все рёбра в графе имеют направление, такой граф называется направленным (или ориентированным), если все рёбра без направления, то граф называется ненаправленным (неориентированным), и, наконец, если в графе некоторые рёбра направленные, а некоторые нет, граф именуется смешанным.



АВ и АС — направленные рёбра, а ВС — ненаправленное

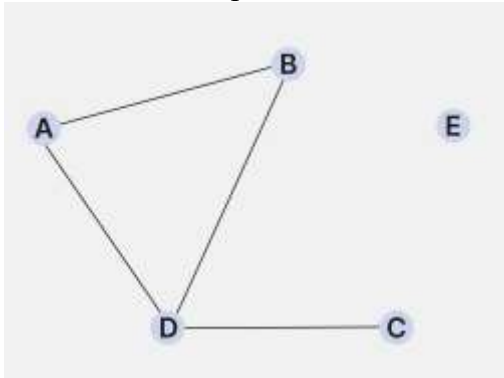
Петля (или цикл) — особый вид ребра, которое начинается и заканчивается в одной и той же вершине. В социальной сети петля может означать, например, что человек отправил сообщение сам себе. Если в графе нет ни одной петли (цикла), такой граф называется ациклическим.



Ребро (A, A) — петля. Оно соединяет вершину A с ней же

Свойства есть и у вершин графа:

- Если две вершины соединены ребром, то их называют смежными.
- Вершина без инцидентных рёбер — изолированная вершина.
- Если у вершины есть только одна связь с другими объектами в графе, то её называют висячей.
- Степень вершины — количество рёбер, которые выходят из неё.



A, B, C и D — смежные вершины, E — изолированная, а C — висячая

Путь, цепь и цикл в графе

В теории графов путь, цепь и цикл — способы перемещения от одной вершины к другой. Эти понятия помогают решать задачи, которые возникают при поиске оптимальных маршрутов или при моделировании сложных систем связей.

Разновидности маршрутов в графах:

- Путь — конечная или бесконечная последовательность вершин и рёбер, в которой конец одного ребра является началом следующего.
- Цепь — это последовательность рёбер, в которой каждое ребро связано со следующим с помощью общей вершины. В цепи могут повторяться вершины, но не рёбра.
- Цикл — особый случай пути, который начинается и заканчивается в одной и той же вершине. При этом все рёбра и вершины (кроме начальной и конечной) уникальны. Важное условие цикла: вы не должны проходить по одному и тому же ребру дважды.

Виды графов

Существует множество видов графов, каждый из которых полезен для отображения определённых типов связи между объектами.

Ориентированные, неориентированные и смешанные графы

- **Ориентированный.** Граф, в котором каждое ребро указывает своё направление с помощью стрелок, по которым можно передвигаться. Например, когда есть путь $A \rightarrow B \rightarrow C$, но нет обратных рёбер; вернуться из C в A нельзя.
- **Неориентированный.** Граф, в котором рёбра не указывают направление. Это значит, что из любой вершины можно попасть в любую точку графа.
- **Смешанный.** Граф, который содержит как ориентированные, так и неориентированные рёбра.

Графы с петлями и мультиграфы

- **Граф с петлями.** Рёбра графа, которые начинаются и заканчиваются в одной и той же вершине, называются петлями. Например, если мы строим схему связей в социальной сети, то с помощью петли можно показать, что пользователь ставит лайки своим же публикациям.

- **Мультиграф.** Если между двумя графами существует несколько рёбер, то такой граф будет называться мультиграфом. Такие графы часто используются в схемах транспортных систем, когда между городами есть несколько разных маршрутов (железная дорога, автомобильная дорога и авиарейсы).

Пустые и полные графы

Пустой граф. Тип графа, который не содержит рёбер. У него могут быть вершины, но между этими вершинами нет никаких связей. Так можно показать системы, в которых есть объекты, не взаимодействующие с другими объектами. Например, в схеме социальных связей так можно изобразить человека, который ни с кем не общается.

Полный граф. Граф, в котором каждая вершина соединена ребром с каждой другой вершиной. Так можно показать коллектив, в котором все знают друг друга.

Связный граф

Связный граф — граф, в котором существует путь между любой парой вершин. Из каждой вершины по рёбрам можно добраться до любой другой вершины. В связном графе нет изолированных вершин или групп, которые не связаны с остальными частями графа.

Взвешенный граф

Взвешенный граф — граф, в котором каждому ребру присвоено числовое значение — вес. Это может быть расстояние, время, стоимость, мощность или другая характеристика, связанная с соединением вершин.

Допустим, между двумя городами проложены две дороги: гладкое асфальтированное шоссе и грунтовка. Понятно, что на машине гораздо приятнее (и дешевле) ехать по асфальту, поэтому вес ребра, моделирующего шоссе, будет ниже.

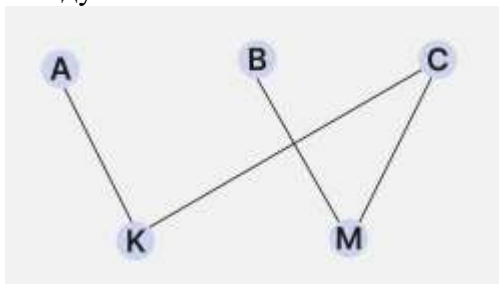
Двудольный граф

Двудольный граф — граф, в котором вершины можно разделить на две группы так, что рёбра будут соединять только вершины из разных групп. То есть внутри одной группы вершины не соединены рёбрами.

Представим, что у нас есть группа студентов и группа курсов. Студенты записываются на курсы. Отобразим эту ситуацию с помощью графа:

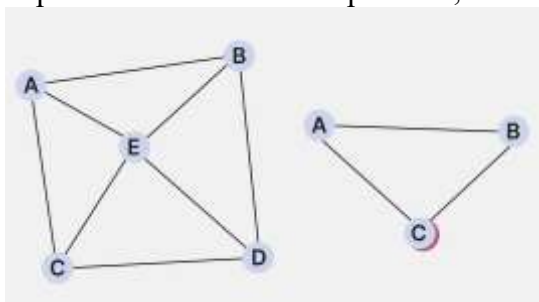
- Вершины из первой группы (А, В, С) — это студенты.
- Вершины из второй группы (К, М) — это курсы.
- Рёбра — запись студентов на курсы.

В графе ниже студент А записан на курс К, В на М, а С на оба курса. Выходит, что вершины из множества студентов соединены с вершинами из множества курсов, но не соединены между собой:



Планарный граф

Планарный граф — граф, который можно нарисовать на плоскости так, чтобы его рёбра пересекались только в вершинах, но не между собой.



Пример планарных графов

Эйлеров граф

Эйлеров граф — граф, в котором существует цикл, который проходит по каждому ребру ровно один раз и возвращается в исходную вершину. Также существует полуэйлеров граф — когда цикл проходит по всем рёбрам ровно один раз, но не возвращается в исходную вершину. Эйлеровы графы используются для решения задач, связанных с поиском оптимального пути. Например, при прокладке туристических маршрутов или при планировании логистических цепочек.

Вы могли слышать про старинную математическую задачу о кёнигсбергских мостах: в городе Кёнигсберге (сегодня Калининград) через реку Прегель (сегодня Преголя) построено семь мостов. Можно ли прогуляться по всем мостам, не заходя на один мост дважды? Эту задачу в 1736 году решил математик Леонард Эйлер, впервые в истории применив теорию графов. А циклические графы, которые он изобрёл в процессе решения, впоследствии назвали эйлеровыми в его честь.

Ответ, кстати, в том, что прогуляться по мостам таким образом невозможно. Если не верите, приезжайте в Калининград и попробуйте сами :)

Деревья в графах

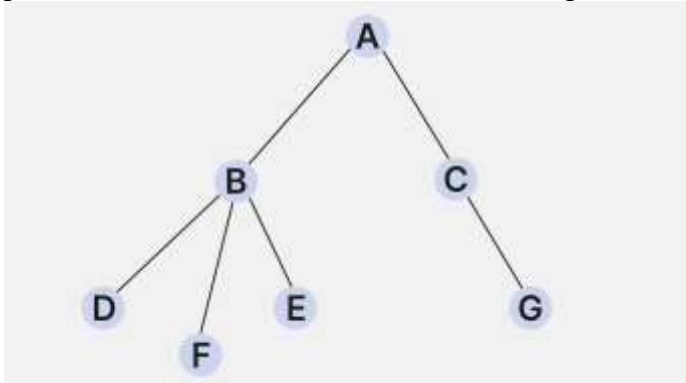
Существует особый вид графов, в которых нет замкнутых областей, но между каждой парой вершин проложен путь. Такие графы называются деревьями и широко используются в алгоритмах поиска и сортировки данных.

Основные свойства деревьев:

- Между любыми двумя вершинами существует связь.
- Между любыми двумя вершинами есть единственный путь. Это означает, что не может быть двух разных путей, соединяющих одну и ту же пару вершин.
- В дереве с n вершин ровно $n - 1$ рёбер. Это фундаментальное свойство деревьев.

Есть разные виды деревьев, предназначенные для решения различных задач:

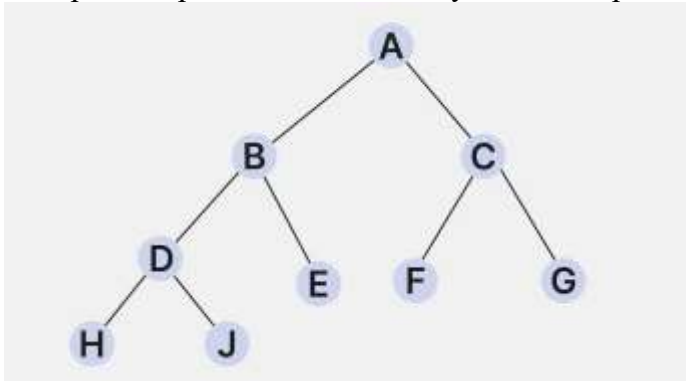
- **Корневое дерево.** Это дерево, в котором одна вершина выделена как корень. В таком дереве определено направление вниз от корня к «листьям» (вершинам, не имеющим потомков). Вершины графа делятся на родительские и дочерние. Например, если вершина A родительская для B и C , то B и C — дочерние для A .



Так выглядит корневое дерево с корнем в вершине A

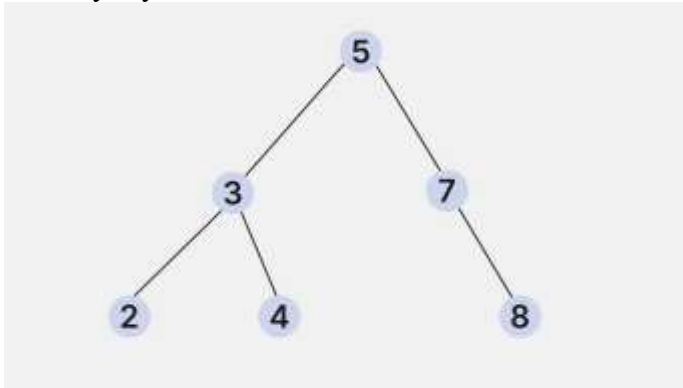
Например, структура файлов в компьютере организована как корневое дерево, в котором есть родительская директория и дочерние файлы.

- **Бинарное дерево.** Это дерево, в котором каждая вершина имеет не более двух потомков. Бинарные деревья часто используются для организации поиска информации.



Пример бинарного дерева

- **Бинарное дерево поиска (BST).** Бинарное дерево, в котором для каждого узла выполняется условие: значения всех узлов в левом поддереве меньше значения родительского узла, а в правом поддереве — больше или равны ему. BST обеспечивает эффективный поиск, вставку и удаление элементов.



Бинарное дерево поиска

Задания для практического занятия:

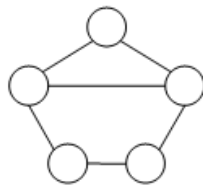
I. Задан граф G (рис.1):

- составить событие S , удалением двух ребер;
- записать матрицу инцидентности Q , определяемую по событиям S ;
- найти частотную матрицу отношений F , соответствующую матрице Q ;
- вычислить значения производной на ребрах графа;
- построить модель.

II. Построить дерево (рис.2), зафиксировав вершину V_n .

Вариант 1.

1.



(рис.1)

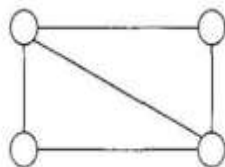
2.



(рис.2)

Вариант 2.

1.



(рис.1)

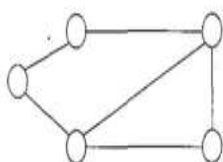
2.



(рис.2)

Вариант 3.

1.



2.



(рис.1)

(рис.2)

Вопросы и задания для закрепления:

1. Дайте определения графу, подграфу, связному графу.
2. Перечислите основные операции над графами.
3. Что называют матрицей инцидентности?

Список рекомендуемой литературы:

1. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник. – 3 –е изд., стереотип. – М: Издательский центр «Академия»; Мастерство, 2021. – 304 с.
2. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике: Учеб. пособие для сред. проф. образования. – 3 –е изд., перераб. М: издат. Центр «Академия», 2022
3. Башмаков М.И. Математика: учебник для учреждений начального и среднего профессионального образования.- М.: издательский центр «Академия», 2021
4. П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т.Л. Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах.- М.: Высшая школа, 2020,
5. Дадаян, А. А. Сборник задач по математике: учебное пособие / А. А. Дадаян. - 3-е изд. - Москва: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2021. - 352 с. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-91134-803-8. - Текст: электронный. <https://e.lanbook.com/book/2579123>

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Практическое занятие № 15

Тема 4.1 Комплексные числа и действия над ними.

Название практической работы: «Комплексные числа и действия над ними».

Ведущая дидактическая цель: формирование навыков и умений выполнения действий над комплексными числами в алгебраической форме.

Формируемые ОК:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе

с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях.

Формируемые ПК (элементы ПК):

ПК 1.1. Планировать работу растениеводческих бригад (звеньев, работников) по выполнению полевых работ.

ПК 1.6 Формировать первичную отчетность по результатам выполнения работ, в том числе в электронном виде.

ПК 2.1. Планировать выполнение работ по получению, первичной обработке, хранению продукции животноводства в соответствии с технологическими картами, регламентами.

ПК 2.6. Формировать первичную отчетность по содержанию и разведению сельскохозяйственных животных, учёту продукции животноводства, в том числе в электронном виде.

Учебные материалы: карточки с заданиями практической работы, карточки с контрольными вопросами.

Содержание работы: записать теоретическую часть и решить задачи практической работы.

Характер выполнения работы: репродуктивный, поисковый

Форма организации занятия: фронтальная, индивидуально – групповая.

Теоретическая часть практического занятия:

Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме производится по правилам соответствующих действий над многочленами.

Пример 1. Выполнить сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел:

Решение:

1. Сложение комплексных чисел: $z_1 = 4 + 2i$, $z_2 = 1 + 5i$.

По правилу сложения комплексных чисел получим:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i = (4 + 2i) + (1 + 5i) = (4 + 1) + (2 + 5)i = 5 + 7i.$$

2. Вычитание комплексных чисел: $z_1 = 3 + 5i$, $z_2 = 6 + 3i$.

По правилу вычитания комплексных чисел получим:

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i = (3 - 6) + (5 - 3)i = -3 + 2i.$$

3. Умножение комплексных чисел: $z_1 = 5 - 4i$, $z_2 = 3 + 2i$.

По правилу умножения комплексных чисел получим:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (5 - 4i)(3 + 2i) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 2i - 4i \cdot 3 - 4i \cdot 2i = \\ &= 15 + 10i - 12i - 8i^2 = 15 - 2i - 8(-1) = 23 - 2i. \end{aligned}$$

4. Деление комплексных чисел: $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 4 + 5i$.

Умножаем делимое и делитель на множитель, сопряженный делителю:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{(a_2 + b_2i)(a_2 - b_2i)} = \frac{(2 - 3i)(4 - 5i)}{(4 + 5i)(4 - 5i)} = \frac{8 - 10i - 12i + 15i^2}{16 - 25i^2} = \frac{8 - 22i + 15(-1)}{16 - 25(-1)} = \\ &= \frac{-7 - 22i}{41} = -\frac{7}{41} - \frac{22}{41}i; \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить: i^{15} , $(1 + i)^8$

Решение:

1. Так как $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$, получим:

$$i^{15} = (i^2)^7 \cdot i = (-1)^7 \cdot i = -1 \cdot i = -i.$$

2. Используя соотношение $(1 + i)^2 = 2i$, получим:

$$(1 + i)^8 = [(1 + i)^2]^4 = (2i)^4 = 16 \cdot i^4 = 16 \cdot (i^2)^2 = 16 \cdot (-1)^2 = 16.$$

Задания для практического занятия:

1. Выполните сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме.

2. Возведите в степень.

Вариант 1.

1. а) $(3+i)+(-3-8i)$; в) $(5+4i)(1+2i)$;
б) $(4+5i)-(-2+3i)$; г) $\frac{3-i}{3+i}$.
2. а) i^7 ; б) $(1+i)^{15}$; в) $i+i^2+i^6+i^8+i^{10}$.

Вариант 2.

1. а) $(5-4i)+(7+4i)$; в) $(8-2i)(8+2i)$;
б) $(3+9i)-(1+3i)$; г) $\frac{1-i}{i-2}$.
2. а) i^{23} ; б) $(1+i)^{19}$; в) $i^6+i^7+i^8+i^9+i^{10}$.

Вариант 3.

1. а) $(3+2i)+(5+3i)$; в) $(5-3i)(5+3i)$;
б) $(4+3i)-(2+i)$; г) $\frac{4i+1}{3-i}$.
2. а) i^{25} ; б) $(1+i)^5$; в) $i+i^3+i^5+i^7+i^9$.

Вопросы и задания для закрепления:

1. Дайте определение равным, противоположным, сопряженным, мнимым комплексным числам.
2. Запишите алгебраическую форму комплексного числа.
3. Как выполняются действия над комплексными числами в алгебраической форме?
4. Правило вычисления натуральных степеней мнимой единицы?

Список рекомендуемой литературы:

1. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник. – 3 –е изд., стереотип. – М: Издательский центр «Академия»; Мастерство, 2021. – 304 с.
2. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике: Учеб. пособие для сред. проф. образования. – 3 –е изд., перераб. М: издат. Центр «Академия», 2022
3. Башмаков М.И. Математика: учебник для учреждений начального и среднего профессионального образования.- М.: издательский центр «Академия», 2021
4. П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т.Л. Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах.- М.: Высшая школа, 2020,
5. Дадаян, А. А. Сборник задач по математике: учебное пособие / А. А. Дадаян. - 3-е изд. - Москва: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2021. - 352 с. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-91134-803-8. - Текст: электронный. <https://e.lanbook.com/book/2579123>

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Практическое занятие № 16

Тема 5.1 Вероятность. Теорема сложения вероятностей.

Название практической работы: «Вычисление вероятности события»

Ведущая дидактическая цель: формирование умений решать задачи, используя используя определения и формулы разных видов комбинаций без повторений и с повторениями; решать задачи, используя правила комбинаторики.

Формируемые ОК:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях.

Формируемые ПК (элементы ПК):

ПК 1.1. Планировать работу растениеводческих бригад (звеньев, работников) по выполнению полевых работ.

ПК 1.6 Формировать первичную отчетность по результатам выполнения работ, в том числе в электронном виде.

ПК 2.1. Планировать выполнение работ по получению, первичной обработке, хранению продукции животноводства в соответствии с технологическими картами, регламентами.

ПК 2.6. Формировать первичную отчетность по содержанию и разведению сельскохозяйственных животных, учёту продукции животноводства, в том числе в электронном виде.

Учебные материалы: карточки с заданиями практической работы, карточки с контрольными вопросами.

Содержание работы: записать теоретическую часть и решить задачи практической работы.

Характер выполнения работы: репродуктивный, поисковый

Форма организации занятия: фронтальная, индивидуально – групповая.

Теоретическая часть практического занятия:

Классическое определение вероятности

Вероятностью $P(A)$ события A называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. **Вероятность $P(A)$** события A определяется по формуле

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

,

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих A ; n – число всех возможных элементарных исходов испытания.

В примере 4 всего элементарных исходов 6; из них 5 благоприятствуют событию A .

Следовательно, вероятность того что взятый шар окажется цветным, равна $P(A) = 5/6$.

Пример 1. В урне находится 7 шаров: 2 белых, 4 черных и 1 красный. Вынимается один шар наугад. Какова вероятность того, что вынутый шар будет чёрным?

Решение. Занумеруем шары. Пусть, например, шары с номерами 1 и 2 – белые, с номерами 3, 4, 5 и 6 – чёрные, а красному шару присвоим номер 7. Так как мы можем вынуть только один из семи шаров, то общее число равновозможных исходов равно семи ($n = 7$). Из

них 4 исхода – появление шаров с номерами 3, 4, 5 и 6 – приведут к тому, что вынутый шар будет чёрным ($m = 4$). Тем самым,

вероятность события A , состоящего в появлении чёрного шара, равна

Пример 2. Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 50. Какова вероятность того, что взятый наудачу студентом билет, содержащий 2 вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов?

Решение.

1) Обозначим событие A - «Вытянутый студентом билет состоит из подготовленных им билетов». Для вычисления вероятности появления данного события воспользуемся классическим определением вероятности события, согласно которому вероятность определяется по формуле:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число исходов, при которых появляется событие A ,
 n – общее число элементарных несовместных равновозможных исходов.

2) Определим n . Общее число билетов определяется сочетанием по 2 из 60:

$$n = C_{60}^2 = \frac{60!}{58! \cdot 2!} = \frac{60 \cdot 59}{2} = 1770$$

3) Количество билетов, вопросы которых студент знает, определяется сочетанием по 2 из 50:

$$m = C_{50}^2 = \frac{50!}{48! \cdot 2!} = \frac{50 \cdot 49}{2} = 1225$$

4) Определим вероятность события A :

$$P(A) = \frac{1225}{1770} = 0,69.$$

Ответ: Вероятность того, что взятый наудачу студентом билет, содержащий 2 вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов равна $P(A) = 0,69$. То есть, если будет, например, 100 таких студентов, то 69 из них вытянут билеты, к вопросам которых они подготовлены.

Свойство 1. Вероятность *достоверного* события A равна единице: $P(A) = 1$.

Свойство 2. Вероятность *невозможного* события A равна нулю: $P(A) = 0$.

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между *нулем* и *единицей*: $0 < P(A) < 1$

Пример 3. Так как вероятность выпадения 13 очков при бросании пары костей – невозможное событие, его вероятность равна *нулю*.

Классическое определение вероятности предполагает, что число элементарных исходов испытания конечно. На практике же часто встречаются испытания, число возможных исходов которых бесконечно. Кроме этого, часто невозможно представить результат испытания в виде совокупности элементарных событий. Еще труднее указать основания, позволяющие считать элементарные события равновероятными. По этой причине, наряду с классическим определением вероятности используют и другие определения, в частности **статистическое определение**.

Статистическое определение вероятности

Относительной частотой события A называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний:

$$W(A) = \frac{m}{n}$$

Задания для практического занятия:

№1. В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 1 шар, найти вероятность того, что он будет: а) белым, б) красным, в) чёрным.

№2. В коробке лежат 8 зеленых, 7 синих и 15 красных карандашей. Вычислить вероятность того, что взятый наугад карандаш будет, синим или зеленым.

№3. В одной коробке находится 4 белых и 8 черных шаров, а в другой – 3 белых и 9 черных. Из каждой коробки вынули по шару. Вычислить вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

№4. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает её наугад. Определить вероятность того, что ему придётся звонить не более чем в 3 места.

№5. Абонент забыл последние 2 цифры телефонного номера, но помнит, что они различны и образуют двузначное число, меньшее 30. С учетом этого он набирает наугад 2 цифры. Найти вероятность того, что это будут нужные цифры

№6. Цифры 1, 2, 3, ..., 9, выписанные на отдельные карточки складывают в ящик и тщательно перемешивают. Наугад вынимают одну карточку. Найти вероятность того, что число, написанное на этой карточке: а) четное; б) двузначное.

№7. На каждой из пяти одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: "а", "м", "р", "т", "ю". Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырех вынутых по одной карточке можно прочесть слово "юрта".

№8. Ребенок имеет на руках 5 кубиков с буквами: А, К, К, Л, У. Какова вероятность того, что ребенок соберет из кубиков слово "кукла"?

№9. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трехтомник Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания номера слева направо, но не обязательно рядом.

№10. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему три вопроса?

№11. На карточках написаны целые числа от 1 до 15 включительно. Наудачу извлекаются две карточки. Какова вероятность того, что сумма чисел, написанных на карточках, равна десяти?

№12. В урне лежат шары, двузначные номера которых составлены из цифр 1,2,3,4,5. Какова вероятность вынуть шар с номером 15?

Вопросы и задания для закрепления:

1. Что называется вероятностью события?
2. Сформулируйте теоремы сложения и умножения вероятностей.
3. Приведите примеры совместных и несовместных, независимых событий.

Список рекомендуемой литературы:

1. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник. – 3 –е изд., стереотип. – М: Издательский центр «Академия»; Мастерство, 2021. – 304 с.
2. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике: Учеб. пособие для сред. проф. образования. – 3 –е изд., перераб. М: издат. Центр «Академия», 2022
3. Башмаков М.И. Математика: учебник для учреждений начального и среднего профессионального образования.- М.: издательский центр «Академия», 2021
4. П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т.Л. Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах.- М.: Высшая школа, 2020,
5. Дадаян, А. А. Сборник задач по математике: учебное пособие / А. А. Дадаян. - 3-е изд. - Москва: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2021. - 352 с. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-91134-803-8. - Текст: электронный. <https://e.lanbook.com/book/2579123>

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Практическое занятие № 17

Тема 5.1 Вероятность. Теорема сложения вероятностей.

Название практической работы: «Решение практических задач на определение вероятности события»

Ведущая дидактическая цель: формирование навыков решения вероятностных задач; умения вычисления вероятностей совместных и несовместных, независимых событий.

Формируемые ОК:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях.

Формируемые ПК (элементы ПК):

ПК 1.1. Планировать работу растениеводческих бригад (звеньев, работников) по выполнению полевых работ.

ПК 1.6 Формировать первичную отчетность по результатам выполнения работ, в том числе в электронном виде.

ПК 2.1. Планировать выполнение работ по получению, первичной обработке, хранению продукции животноводства в соответствии с технологическими картами, регламентами.

ПК 2.6. Формировать первичную отчетность по содержанию и разведению сельскохозяйственных животных, учёту продукции животноводства, в том числе в электронном виде.

Учебные материалы: карточки с заданиями практической работы, карточки с контрольными вопросами.

Содержание работы: записать теоретическую часть и решить задачи практической работы.

Характер выполнения работы: репродуктивный, поисковый

Форма организации занятия: фронтальная, индивидуально – групповая.

Теоретическая часть практического занятия:

На основе конкретных примеров покажем способы вычисления вероятностей события.

Пример 1.

В лотерее из 1000 билетов имеются 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?

Решение.

Общее число различных исходов есть $n=1000$. Число исходов, благоприятствующих получению выигрыша, составляет $m=200$. Согласно формуле $P(A)=m/n$, получим $P(A)=200/1000=1/5=0,2$.

Пример 2.

Из урны, в которой находятся 5 белых и 3 черных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется черным.

Решение.

Обозначим событие, состоящее в появлении черного шара, через А. Общее число случаев $n=5+3=8$. Число случаев m , благоприятствующих появлению события А, равно 3. По формуле $P(A)=m/n$ получим $P(A)=m/n=3/8=0,375$.

Пример 3.

Из урны в которой находится 12 белых и 8 черных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

Решение.

Обозначим событие, состоящее в проявлении черного шара, через А. Общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 элементов (12+8) по два:

$$n = C_{20}^2 = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190.$$

$$m = C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28.$$

Число случаев m , благоприятствующих событию А, составляет

По формуле $P(A) = m/n$ находим вероятность появления двух черных шаров: $P(A) = m/n = 28/190 = 14/95 = 0,147$.

Пример 4.

Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно.

Решение.

Пусть А- событие, состоящее в том, что наудачу взятое число кратно 3, а В- в том, что оно кратно 5. Найдем $P(A+B)$. Так как А и В совместные события, то воспользуемся формулой $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Всего имеется 90 двузначных чисел : 10, 11, ..., 98, 99. Из них 30 являются кратными 3 (благоприятствуют наступлению события А); 18- кратными 5 (благоприятствуют наступлению события В) и 6- кратными одновременно 3 и 5 (благоприятствуют наступлению события АВ). Таким образом, $P(A)=30/90=1/3$, $P(B)=18/90=1/5$, $P(AB)=6/90=1/15$, т.е. $P(A+B)=1/3+1/5-1/15=7/15=0,467$.

Пример 5.

В одной урне находится 4 белых и 8 черных шаров, в другой – 3 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Решение.

Пусть А - появление белого шара из первой урны, а В - появление белого шара из второй урны. Очевидно, что события А и В независимы. Найдем $P(A) = 4/12=1/3$, $P(B) = 3/12=1/4$.

По формуле получим $P(AB)=P(A)*P(B)=(1/3)*(1/4)=1/12=0,083$.

Задания для практического занятия:

Найти вероятности данных событий.

Вариант 1.

1. В лотерее из 50 билетов 8 выигрышных. Какова вероятность того, что среди пяти наугад выбранных билетов два окажутся выигрышными?
2. На карточках разрезной азбуки написаны 32 буквы русского алфавита. 4 карточки вынимают наугад одну за другой и укладывают на стол в порядке появления. Какова вероятность того, что получится слово “Югра”?
3. В урне 6 белых и 9 черных шаров. Из урны вынимают одновременно два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми?

Вариант 2.

1. Из шести одинаковых карточек разрезной азбуки: “а”, “е”, “м”, “н”, “о”, “р” наудачу выбирают четыре карточки и складывают их в ряд в порядке их извлечения. Какова вероятность при этом получить слово “море”?
2. В партии из 15 деталей имеется 9 стандартных. Найдите вероятность того, что среди семи взятых наугад деталей 5 стандартных?
3. Из букв слова «производная» наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что выбранная буква будет: а) согласной; в) гласной; с) буква «о».

Вариант 3.

1. На шести одинаковых карточках написаны буквы “а”, “в”, “к”, “м”, “о”, “с”. Карточки перемешивают и раскладывают наудачу в ряд. Какова вероятность того, чтобы получилось слово “Москва”?
2. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Найдите вероятность того, что среди двух взятых наугад деталей одна бракованная?
3. В первой урне находятся 10 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 9 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми?

Вопросы и задания для закрепления:

4. Что называется вероятностью события?
5. Сформулируйте теоремы сложения и умножения вероятностей.
6. Приведите примеры совместных и несовместных, независимых событий.

Список рекомендуемой литературы:

1. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник. – 3 –е изд., стереотип. – М: Издательский центр «Академия»; Мастерство, 2021. – 304 с.
2. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике: Учеб. пособие для сред. проф. образования. – 3 –е изд., перераб. М: издат. Центр «Академия», 2022
3. Башмаков М.И. Математика: учебник для учреждений начального и среднего профессионального образования.- М.: издательский центр «Академия», 2021
4. П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т.Л. Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах.- М.: Высшая школа, 2020,
5. Дадаян, А. А. Сборник задач по математике: учебное пособие / А. А. Дадаян. - 3-е изд. - Москва: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2021. - 352 с. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-91134-803-8. - Текст: электронный. <https://e.lanbook.com/book/2579123>

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Практическое занятие № 18

Тема 5.2 Случайная величина, ее функция распределения

Название практической работы: «Решение задач с реальными дискретными случайными величинами».

Ведущая дидактическая цель: формирование навыков вычисления дискретной случайной величины, математического ожидания (среднего значения) дискретной случайной величины, дисперсии, а также среднего квадратичного отклонения дискретной случайной величины.

Формируемые ОК:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях.

Формируемые ПК (элементы ПК):

ПК 1.1. Планировать работу растениеводческих бригад (звеньев, работников) по выполнению полевых работ.

ПК 1.6 Формировать первичную отчетность по результатам выполнения работ, в том числе в электронном виде.

ПК 2.1. Планировать выполнение работ по получению, первичной обработке, хранению продукции животноводства в соответствии с технологическими картами, регламентами.

ПК 2.6. Формировать первичную отчетность по содержанию и разведению сельскохозяйственных животных, учёту продукции животноводства, в том числе в электронном виде.

Учебные материалы: карточки с заданиями практической работы, карточки с контрольными вопросами.

Содержание работы: записать теоретическую часть и решить задачи практической работы.

Характер выполнения работы: репродуктивный, поисковый

Форма организации занятия: фронтальная, индивидуально – групповая.

Теоретическая часть практического занятия:

Случайные величины, имеющие счетные множества возможных значений, называются **дискретными**. **Математическим ожиданием (средним значением)** дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех ее

возможных значений на соответствующие им вероятности $M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$

Дисперсией дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания $D(X) = M(X - M(X))^2$. Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формулам:

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 p_i$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

Средним квадратичным отклонением дискретной случайной величины называют корень квадратный из дисперсии $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Пример 1: Случайная величина X задана таблицей распределения вероятностей. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

x_i	2	5	8	9
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Решение:

$$M(X) = 2 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,4 + 8 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,2 = 0,2 + 2 + 2,4 + 1,8 = 6,4$$

$$M(X^2) = 4 \cdot 0,1 + 25 \cdot 0,4 + 64 \cdot 0,3 + 81 \cdot 0,2 = 45,8$$

$$D(X) = 45,8 - 6,4^2 = 4,84$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{4,84} = 2,2$$

Задания для практического занятия:

№ 1

- 1202** Найти дисперсию выборки:
- 1) 10 см, 12 см, 7 см, 11 см; 2) 16 г, 14 г, 13 г, 17 г;
 - 3) 11 с, 14 с, 11 с, 12 с, 12 с; 4) 5 м, 13 м, 8 м, 12 м, 12 м.

№ 2

- 1203** Найти дисперсию совокупности значений случайной величины X , заданной частотным распределением:
- 1)

X	2	3	4	6
M	3	2	2	3

2)

X	-1	2	3	4	5
M	3	1	2	3	1
- 1204** Найти среднее квадратичное отклонение от среднего значения элементов выборки:
- 1) 3 кг, 5 кг, 5 кг, 8 кг, 4 кг; 2) 12 м, 10 м, 7 м, 12 м, 9 м.
- 1205** Сравнить дисперсии двух выборок, имеющих одинаковые средние значения:
- 1) 6, 10, 7, 8, 9 и 8, 9, 5, 10;
 - 2) 5, 12, 7, 8, 18 и 17, 6, 11, 7, 9, 10.

Вопросы и задания для закрепления:

1. Что называется вероятностью события?
2. Сформулируйте теоремы сложения и умножения вероятностей.
3. Приведите примеры совместных и несовместных, независимых событий.

Список рекомендуемой литературы:

1. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник. – 3 –е изд., стереотип. – М: Издательский центр «Академия»; Мастерство, 2021. – 304 с.
2. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике: Учеб. пособие для сред. проф. образования. – 3 –е изд., перераб. М: издат. Центр «Академия», 2022
3. Башмаков М.И. Математика: учебник для учреждений начального и среднего профессионального образования.- М.: издательский центр «Академия», 2021
4. П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т.Л. Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах.- М.: Высшая школа, 2020,
5. Дадаян, А. А. Сборник задач по математике: учебное пособие / А. А. Дадаян. - 3-е изд. - Москва: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2021. - 352 с. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-91134-803-8. - Текст: электронный. <https://e.lanbook.com/book/2579123>

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 балл.

За не правильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 - 100	5	отлично
80 - 89	4	хорошо
70 - 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

ЗАДАНИЕ 2

Контрольная работа № 1 по теме итогам 5 семестра.

Инструкция: задание состоит из вопросов и задач. Решая задачи и отвечая на вопросы, необходимо дать подробное правильное решение задачи и правильные ответы на вопросы, которые будут равны 1, 2 или 3 балла. В итоге, решая правильно все задачи, в сумме можно набрать максимально возможное число баллов равное 18, 17 – 18 баллов соответствует оценке «отлично», набрав 15 - 16 баллов вы получаете оценку «хорошо», 12 - 14 баллов – оценка «удовлетворительно». Прежде чем приступить к выполнению задания, обращайтесь внимание на формулировку каждой задачи и каждого вопроса. Вспомни значение терминов, понятий, указанных в вопросах и задачах.

Вариант 1.

№	Вопрос	Эталон ответа	Р = 18
1.	Вычислить определитель матрицы $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$	- 4	2
2.	. Найти производную функции $y = 5\sqrt[5]{x^3}$	$3x^{-2/5}$	2
3.	. Вычислить $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 4x + 3}$ $x_0 = 3$	7/6	1
4.	. Вычислить $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 4x + 3}$ $x_0 = -1$	-2,5	2
5.	. Вычислить $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 4x + 3}$ $x_0 = \infty$	3	2
6.	Вычислить определенный интеграл $\int_1^3 (3x^2 - 2x + 2) dx$	22	2
7.	Найти неопределенный интеграл $\int (1 - x^4) x^3 dx$	$x^4/4 - x^7/7 + C$	2
8.	Найдите ускорение точки в указанный момент времени, если скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением: $v = t^2 + 5t + 1$, $t = 3$.	11	2
9.	Решить систему линейных уравнений методом Крамера:	(3; 1; 1)	3

	$\begin{cases} 2x - 1y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$		
--	---	--	--

Вариант 2.

№	Вопрос	Эталон ответа	Р = 18
1.	Вычислить определитель матрицы $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$	- 4	2
2.	Найти производную функции $y = 5\sqrt[5]{x^3}$	$3x^{-2/5}$	2
3.	Вычислить $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x - 4}$, $x_0 = 2$	0,3	1
4.	Вычислить $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x - 4}$, $x_0 = 1$	1/7	2
5.	Вычислить $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x - 4}$, $x_0 = \infty$	2/3	2
6.	Вычислить определенный интеграл $\int_{-1}^2 (6x^2 + 2x - 1) dx$	18	2
7.	Найти неопределенный интеграл $\int (1 - 2x^3)x^2 dx$	$(x^3 + x^6)/3$	2
8.	Скорость движения точки изменяется по закону $v = 3t^2 + 2t + 1$ (м/с). Найти путь S, пройденный точкой за 8 секунд от начала движения.	584	2
9.	Решить систему линейных уравнений методом Крамера: $\begin{cases} 2x - 1y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$	(3; 1; 1)	3

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 – 3 балла.

За неправильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Шкала оценки образовательных достижений

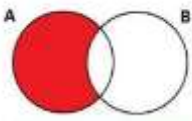
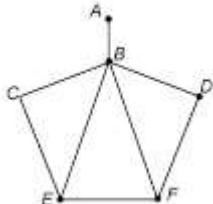
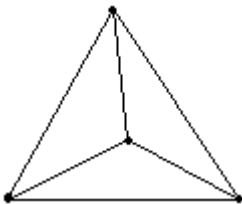
Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
$90 \div 100$	5	отлично
$80 \div 89$	4	хорошо
$70 \div 79$	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Контрольная работа № 2 по теме итогам 6 семестра.

Инструкция: задание состоит из вопросов и задач. Решая задачи и отвечая на вопросы, необходимо дать подробное правильное решение задачи и правильные ответы на вопросы, которые будут равны 1 или 2 балла. В итоге, решая правильно все задачи, в сумме можно набрать максимально возможное число баллов равное 15, 14 – 15 баллов соответствует оценке «отлично», набрав 12 - 13 баллов вы получаете оценку «хорошо», 10 – 11

баллов – оценка «удовлетворительно». Прежде чем приступить к выполнению задания, обращай внимание на формулировку каждой задачи и каждого вопроса. Вспомни значение терминов, понятий, указанных в вопросах и задачах.

Вариант 1.

№	Вопрос	Эталон ответа	Р = 15
1.	Даны множества $A = \{10, 12\}$ $B = \{3, 9, 12\}$ $C = \{6, 7, 11, 12\}$. Найти объединение множеств.	$\{3; 6; 7; 9; 10; 11; 12\}$	1
2.	Какая операция изображена на кругах Эйлера? 	$E = A \setminus B$	1
3.	Определите степень вершины В: 	5	1
4.	Колины друзья занимаются каким-нибудь видом спорта. 14 из них увлекаются футболом, а 10 — баскетболом. И только двое увлекаются и тем и другим видом спорта. Сколько друзей у Толи?»	22	2
5.	Можно ли нарисовать изображенный на рисунке граф не отрывая карандаш от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз? 	нет	2

6	Найти корни уравнения $x^2 + 2x + 5 = 0$	$-1 + 2i$; $-1 - 2i$	2
7	Вычислить: $7! - 5!$	4920	2
8	Сколькими способами можно расставлять на одной полке шесть различных книг?	720	2
9	Сколько вариантов распределения трех путевок в санатории различного профиля можно составить для пяти претендентов?	60	2

Вариант 2.

№	Вопрос	Эталон ответа	P = 15
1.	Даны множества $A = \{10, 12\}$ $B = \{3, 9, 12\}$ $C = \{6, 7, 11, 12\}$. Найти пересечение множеств	$\{12\}$	1
2.	Пятеро рабочих встретились при высадке цветов в клумбы. Сколько всего было сделано рукопожатий А) 10; Б) 11; В) 5; Г) 6	10	1
3.	Даны два множества $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $B = \{3, 6, 9, 12\}$. Запишите и изобразите графически новое множество Е: $E = A \cup B$	2,3,4,6,8,9,10,12	1
4.	На рисунке — схема дорог, связывающих городские парки А, Б, В, Г, Д, Е. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из парка А в парк Е?	8	2
5.	На завтрак в школьной столовой любой ученик может выбрать булочку, ватрушку, кекс, а запить их он может соком, чаем или компотом. Сколько вариантов завтрака предлагается в столовой?	9	2
6	Найти корни уравнения $x^2 - 4x + 5 = 0$	$2 + i$; $2 - i$	2
7	Вычислить: $\frac{7! + 5!}{6!}$	43/6	2
8	В соревнованиях участвовало четыре команды. Сколько вариантов распределения мест между ними возможно?	24	2
9	На факультете изучается 16 предметов. На понедельник нужно в расписание поставить 3 предмета. Сколькими способами можно это сделать?	3360	2

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 – 2 балла.

За неправильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

ЗАДАНИЕ 3**Задания для промежуточной аттестации.****Задания к дифференцированному зачёту.****Инструкция.**

Задания дифференцированного зачёта рассчитаны на 90 минут.

Задания работы направлены на проверку владения материалом на базовом уровне и умения применять математические знания в практической деятельности и повседневной жизни.

Задания дифференцированного зачёта содержат 10 тестовых заданий из них: заданий по алгебре и математическому анализу – 8, по теории вероятностей и математической статистике – 2

. При выполнении заданий № 1- 6 требуется выбрать один ответ из предоставленных вариантов, при выполнении № 7, 8 следует записать ответ, полученный в ходе вашего решения, № 9, 10 представить ход решения и указать полученный ответ. .

За каждое верно выполненное задание даётся от одного до двух баллов. Если ответа нет или неверный ответ, нет решения задачи (№ 9 – 10) - даётся ноль баллов. Все баллы, полученные за задания, суммируются. За 11 - 12 баллов ставится отметка «3», за 13 - 14 баллов – «4», за 15 – 16 - отметка «5».

Перед началом выполнения заданий необходимо заполнить титульный лист.

Рекомендуем прочитать все задания работы и выбрав те, которые не вызывают у вас затруднения, выполнить их первыми. Затем выполнять задания по мере сложности.

Желаем успеха!

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 - 2 балла.

За неправильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

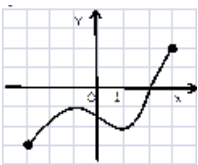
Вариант 1.

№	Вопрос	Эталон ответа	P =16
1.	Найдите область определения функции: $y = 1/(x - 4)$. Варианты ответа: а) $x > 4$; б) $x < 4$; в) $x = 4$; г) $x \neq 4$.	г) $x \neq 4$.	1

2.	На рисунке изображен график функции $y=f(x)$. Найдите промежутки возрастания функции. Варианты ответа: а) $[-3; -1]$; б) $[-1; 1]$; в) $[1; 3]$; г) $[-3; 3]$	б) $[-1; 1]$.	1
3.	Вычислить предел функции: $\lim_{x \rightarrow 6} (36 - x^2)/(6x - x^2)$ Варианты ответа: а) 2; б) 6; в) ∞; г) 0.	а) 2.	2
4.	Вычислить производную функции в точке $x_0 = 1$ $y = 2x^2 - 3x^3 + 4x - 3$. Варианты ответа: а) 1; б) -1; в) -5; г) 5.	б) -1	2
5.	Вычислить интеграл: $\int_0^3 (3 + 12x^2 + 4x) dx$ Варианты ответа: а) 72; б) -144; в) -72; г) 144.	в) -72	2
6.	Вычислите определитель матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Варианты ответа: а) 20; б) 42; в) 23; г) 21.	г) 21.	2
7.	Даны множества $A = \{10; 12\}$, $B = \{3; 9; 12\}$, $C = \{6; 7; 11; 12\}$. Найти: а) объединение множеств A и B; б) пересечение множеств B и C. Запишите ответ.	а) $\{3; 9; 10; 12\}$; б) $\{12\}$;	1
8.	Выполните действия над комплексными числами: $(3 - 2i) \cdot (2 + 3i)$ Запишите ответ.	$12 + 5i$	1
9.	Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным. Запишите решение и ответ.	0,019	2
10.	Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины x. Закон распределения задан таблицей.	$M = 0$ $D =$	2

	х	- 0,1	- 0,01	0	0,01	0,1		0,00404	
	р	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1			
	Запишите решение и ответ								

Вариант 2.

№	Вопрос	Эталон ответа	P=32
1.	Найдите область определения функции: $y = \sqrt{x - 5}$ Варианты ответа: а) $x > 5$; б) $x > 0$; в) $x < 5$; г) $x < 0$	а) $x > 5$	1
2.	На рисунке изображен график функции $y=f(x)$. Найдите нули функции.  Варианты ответа: а) $x = -1$; б) $x = 2$; в) $x = -3$; г) $x = 3$.	б) $x = 2$	1
3.	Вычислить предел функции: $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ _____ Варианты ответа: а) $x = -10$; б) $x = \infty$; в) $x = 0$; г) $x = 10$.	г) $x = 10$.	2
4.	Вычислить производную функции в точке $x_0 = \pi$ $y = 2 \sin x - 3 \cos x$ Варианты ответа: а) $x = -1$; б) $x = -2$; в) $x = 0$; г) $x = 1$.	б) $x = -2$	2
5.	Вычислить интеграл: $\int_0^1 (3x^2 - 5x + 1) dx$ Варианты ответа: а) $x = -0,5$; б) $x = -2$; в) $x = 0,5$; г) $x = 1$.	а) $x = -0,5$	2
6.	Вычислите определитель матрицы: $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ Варианты ответа: а) $x = 60$; б) $x = 6$; в) $x = -2$; г) $x = 46$.	в); $x = -2$	2
7.	Даны множества $A = \{2; 6; 12\}$, $B = \{3; 9; 12; 14\}$, $C = \{3; 11\}$. Найти: а) объединение множеств A и C ; б) пересечение множеств B и C . Запишите ответ.	а) $\{2; 3; 6; 11; 12\}$; б) $\{3\}$	1
8.	Выполните действия над комплексными числами: $(1 + 3i)(2 - 5i)$ Запишите ответ	$(-13 + 11i) \setminus 49$	1

9.	В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах. Запишите решение и ответ.	0,52	2								
10.	Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X , которая задана следующим законом распределения: <table border="1" data-bbox="279 481 758 560"> <tr> <td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr> <tr> <td>p</td><td>0,3</td><td>0,5</td><td>0,2</td></tr> </table> Запишите решение и ответ.	x	1	2	5	p	0,3	0,5	0,2	$M = 2,3$, $D = 2,89$	2
x	1	2	5								
p	0,3	0,5	0,2								

Критерии оценки:

За правильный ответ на вопросы или верное решение задачи выставляется положительная оценка – 1 - 2 балла.

За неправильный ответ на вопросы или неверное решение задачи выставляется отрицательная оценка – 0 баллов.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
$90 \div 100$	5	отлично
$80 \div 89$	4	хорошо
$70 \div 79$	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно